Föreläsning 20

SF1633 Differentialekvationer HT16. Kurt Johansson

Blandade tentamensproblem

Ex. Differentialekvationen

$$x'' - (x-3)x' + x^2 - 4 = 0,$$

där $x = x(t)$ kan omformas till ett system av första ordningen. Klassificera de kritiska punkterna till detta system med avseende på stabilitet och typ.

Lösning: Sätt $y = x'$. Vi får då systemet

$$\begin{cases} x' = y & = P(x,y) \\ y' = (x-3)y - x^2 + 4 & = Q(x,y), \end{cases}$$

ty $y' = x'' = (x-3)x' - x^2 + 4 = (x-3)y - x^2 + 4$.

Högerledet är noll då $y = 0$ och $(x-3)y - x^2 + 4 = 0$, vilket ger

$$y = 0 \text{ och } x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ och } x = \pm 2.$$

De kritiska punkterna är $(-2,0)$ och $(2,0)$.

Vi linjariserar systemet kring de kritiska punkterna. Om (x_0, y_0) är den kritiska punkten ges det linjariserade

Systemets matris av

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y - 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = x - 3$$

I $(-2,0)$ får vi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$ vars egenvärden ges av $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$

dvs. $\lambda^2 + 5\lambda - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2}$. Vi får ett positivt och ett negativt egenvärde. Instabil sadelpunkt.

I $(2,0)$ får vi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$ vars egenvärden är $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Då realdelen < 0 får vi en stabil spiralpunkt.

<u>Svar:</u> $(-2,0)$ instabil sadelpunkt

$(2,0)$ stabil spiralpunkt

Ex. Låt Φ vara en fundamentalmatris till systemet av linjära differentialekvationer

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}, \qquad (1)$$

Härled en partikulärlösning till systemet

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + \bar{F}, \qquad (2)$$

Bestäm den allmänna lösningen till systemet

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\bar{x} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix}.$$

Lösning. Den allmänna lösningen till det homogena systemet (1) kan skrivas

$$\bar{x} = \Phi\bar{c}$$

där $\bar{c}$ är en konstant vektor. Sök partikulärlösning på formen

$$\bar{x}(t) = \Phi(t)\bar{u}(t)$$

Insättning i (2) ger

$$\Phi'(t)\bar{u}(t) + \Phi(t)\bar{u}'(t) = A\Phi(t)\bar{u}(t) + \bar{F}(t) \qquad (4)$$

Då $\Phi(t)$ är en fundamentalmatris så gäller

$$\Phi'(t) = A\Phi(t)$$

varför (4) är ekvivalent med

$$\bar{\Phi}(t)\bar{u}'(t) = \bar{F}(t) \Leftrightarrow \bar{u}'(t) = \Phi(t)^{-1}\bar{F}(t)$$

eftersom $\Phi(t)$ är inverterbar. Alltså är

$$\bar{u}(t) = \int \Phi(t)^{-1}\bar{F}(t)\,dt,$$

vilket ger partikulärlösningen

$$\bar{x}_p = \Phi(t)\int \Phi(t)^{-1}\bar{F}(t)\,dt.$$

Betrakta nu den speciella ekvationen med matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

som har egenvärdet $\lambda = -1$ (dubbelrot). Lösningar finns på formen

$$\bar{x}_1 = \bar{k}e^{\lambda t}, \quad \bar{x}_2 = \bar{k}te^{\lambda t} + \bar{p}e^{\lambda t}$$

där $(A - \lambda I)\bar{k} = 0$, $\bar{k}$ egenvektor

$$(A - \lambda I)\bar{p} = \bar{k}$$

$$(A + I)\bar{k} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ vilket ger}$$

$k_1 = 0$ och vi kan fritt välja k_2, t.ex. $k_2 = 1$.

$\bar{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(A+I)\bar{p} = \bar{h} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ger $-4p_1 = 1$,

medan p_2 kan väljas fritt, t.ex. $p_2 = 0$.

$\bar{p} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$, $\bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} -1/4 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 4te^{-t} \end{pmatrix}$

Vi kan ta

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-t} \\ e^{-t} & 4te^{-t} \end{pmatrix}, \quad \Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 4te^{t} & e^{t} \\ -e^{t} & 0 \end{pmatrix}$$

En partikulärlösning ges av

$$\bar{x}_p = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -e^{-t} \\ e^{-t} & 4te^{-t} \end{pmatrix}}_{\Phi} \int \underbrace{\begin{pmatrix} 4te^{t} & e^{t} \\ -e^{t} & 0 \end{pmatrix}}_{\Phi^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{-t} \end{pmatrix}}_{\bar{F}} dt$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -e^{-t} \\ e^{-t} & 4te^{-t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 5t \\ -1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-t} \\ e^{-t} & 4te^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{2}t^2 \\ -t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} te^{-t} \\ -\frac{3}{2}t^2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Svar: Allmän lösning:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & -e^{-t} \\ e^{-t} & 4te^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} te^{-t} \\ -\frac{3}{2}t^2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Ex. Bestäm den 2π-periodiska lösningen till

$$y'(t) + 2y(t-\pi) = \sin t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(delay-differential equation; retarded differential equation)

Lösning: Utveckla lösningen $y(t)$ i en Fourierserie

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

med perioden 2π. Vi får

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -na_n \sin nt + nb_n \cos nt$$

$$y(t-\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n(t-\pi) + b_n \sin n(t-\pi)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \cos nt + (-1)^n b_n \sin nt$$

Insättning i ekvationen ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} nb_n \cos nt - na_n \sin nt + 2\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \cos nt + (-1)^n b_n \sin nt\right) = \sin t$$

$\Leftrightarrow$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n + 2(-1)^n a_n) \cos nt + (-na_n + 2(-1)^n b_n) \sin nt = \sin t$$

Endast koefficienten för $\sin t$ i VL är $\neq 0$.
Vi får

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ -na_n + 2(-1)^n b_n = 0, \ n > 1 \\ nb_n + 2(-1)^n a_n = 0, \ n > 1 \\ b_1 - 2a_1 = 0, \ n = 1 \\ -a_1 - 2b_1 = 1, \ n = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0, \ n > 1 \\ b_n = 0, \ n > 1 \\ a_1 = -\frac{1}{5} \\ b_1 = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Den sökta lösningen är

$$y(t) = -\frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t.$$

Ex. Funktionen f är periodisk med perioden 2π och

$$f(t) = t^2, \quad -\pi < t < \pi.$$

Ange dess Fourierserie och beräkna utgående från den summorna

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{och} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Lösning: f är jämn så vi får en ren cosinusserie

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\left[t^2\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2t\frac{\sin nt}{n}\,dt$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} t\sin nt\,dt = \frac{4}{\pi n}\left[t\,\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}\frac{\cos nt}{n}\,dt$$

$$= \frac{4(-1)^n}{n^2} - \frac{4}{\pi n^2}\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

Eftersom f är styckvis kontinuerligt deriverbar och kontinuerlig på $\mathbb{R}$ så konvergerar Fourierserien överallt mot f,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nt,\ t\in\mathbb{R}$$

(Fourierserien kan också hittas i BETA.)

Insättning av $t=0$ ger

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$\Big(\underbrace{-1+\frac{1}{4}}_{<0}\underbrace{-\frac{1}{9}+\frac{1}{16}}_{<0}\underbrace{-\frac{1}{25}+\frac{1}{36}}_{<0}-\dots = -\frac{\pi^2}{12}$$, rimligt med negativt värde)

Insättning av $t=\pi$ ger ($\cos n\pi = (-1)^n$)

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ex. Bestäm alla lösningar på formen

$$u(r,\theta) = R(r)T(\theta)$$

till

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

I de fall där "r-ekvationen" har lösningar på formen Cr^p, $p \neq 0$.

(Detta är Laplace ekvation i planet i polära koordinater.)

Lösning. Insättning av $u(r,\theta) = R(r)T(\theta)$ i ekv. ger

$$R''T + \frac{1}{r}R'T + \frac{1}{r^2}RT'' = 0$$

$$\overset{(RT\neq 0)}{\Rightarrow} \quad \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{T''}{T} = 0$$

$$\overset{(r\neq 0)}{\Rightarrow} \quad r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{T''}{T} = \lambda$$

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \\ T'' + \lambda T = 0 \end{cases}$$

Vi gör ansatsen $R(r) = r^p$

$$r^2 p(p-1) r^{p-2} + r p r^{p-1} - \lambda r^p = 0$$

$$\Leftrightarrow (p(p-1) + p - \lambda) r^p = 0$$

$$\Rightarrow p^2 = \lambda ,$$

Vi ser att $\lambda > 0$ eftersom $p \neq 0$. Skriv $\lambda = \mu^2, \mu > 0$.

Vi får $p^2 = \mu^2 \Leftrightarrow p = \pm\mu$. R-ekvationens lösning blir

$$R(r) = c_1 r^{\mu} + c_2 r^{-\mu}$$

T-ekvationen blir

$$T'' + \mu^2 T = 0 \Leftrightarrow T(\theta) = d_1 \cos\mu\theta + d_2 \sin\mu\theta .$$

Produktlösningen blir

$$u(r,\theta) = (c_1 r^{\mu} + c_2 r^{-\mu})(d_1 \cos\mu\theta + d_2 \sin\mu\theta) , \quad \mu > 0$$

om R-ekvationens lösningar skall ha önskad form.