Föreläsning 1

SF1633 Differentialekvationer HT16, Kurt Johansson

En differentialekvation är en viss typ av ekvation som innehåller en eller flera okända funktioner och deras derivator.

Ordinära differentialekvationer (ODE)

Funktion(er) av en variabel.

$$y'' + x^2 y' + y = 0$$

$$y = y(x)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2$$

(system)

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t)$$

Partiella differentialekvationer (PDE)

Funktioner av flera variabler

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{(Laplace ekvation)}, \quad u = u(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{(vågekvationen)}$$

$$u = u(x,y,z,t)$$

Ordning av ekvation: ordningen av den högsta derivatan i ekvationen.

ODE av ordning n har formen:

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \qquad (1)$$

för x i något intervall. Om F är en linjär funktion av $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$, med koefficienter som kan bero på x, har vi en linjär ODE

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \ldots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) - g(x) = 0$$

(Ofta skriver vi, precis som i exemplen ovan inte $y(x), y'(x)$ etc. utan bara $y, y', \ldots$)

$$y'' + x^2 y' + y = 0$$

är en linjär ekvation. Om ekvationen inte är linjär är den olinjär eller icke-linjär.

En funktion $y = \varphi(x)$ är en lösning till (1) på intervallet $I \subseteq \mathbb{R}$ om

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0 \text{ för alla } x \in I,$$

dvs. φ satisfierar ekvationen.

Ex. Enklaste exemplet

$$y' = f(x) \,, \qquad (2)$$

där $f(x)$ är känd, t.ex. $f(x) = \cos x$. (2) kan lösas med integration,

$$y(x) = \int f(x)\,dx + C \,.$$

Om $f(x) = \cos x$,

$$y(x) = \int \cos x\,dx + C = \sin x + \underset{\text{okänd konstant}}{C}$$

Ekvationen kan lösas medelst integration.

Ex. $y' - ky = 0$ eller $y' = ky$,

där k är en konstant. Lite eftertanke leder till att $y = ce^{kx}$ löser ekvationen för varje $c \in \mathbb{R}$ och detta ger i själva verket alla lösningar. (Vi återkommer till detta.)

$y = ce^{kx}$, $c \in \mathbb{R}$ är den <u>allmänna lösningen</u>

I båda fallen ovan har vi givit <u>explicita lösningar</u>, vi ger en formel.

Ex. $y' + y'\cos y = 1$

kan skrivas

$$\frac{d}{dx}(y + \sin y) = 1,$$

vilket ger att $y = y(x)$ satisfierar

$$y + \sin y = x + c, \quad (3)$$

där c är en godtycklig konstant, $c \in \mathbb{R}$. I (3) går det inte att på något enkelt sätt ge en formel för y som funktion av x. (3) ger lösningen i implicit form. Observera att vi får en okänd parameter.

För ekvationen (1) får vi i allmänhet n okända parametrar (konstanter) i lösningen:

$$G(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0 \quad (4)$$

Ex. Betrakta ekvationen

$$y' + 2xy^2 = 0. \quad (5)$$

Den har lösningar

$$y = \frac{1}{x^2 + c}, \quad c \in \mathbb{R} \quad (6)$$

$$-\frac{y'}{y^2} = 2x \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y}\right) = 2x \quad \underline{\text{om}} \quad y \neq 0$$

vilhet ger

$$\frac{1}{y} = x^2 + C \Rightarrow y = \frac{1}{x^2+C},$$

(6) är inte den allmäna lösningen. Vi har också lösningen $y = 0$ (dvs. $y(x) = 0$ för alla x). Lösningen $y = 0$ kallas en <u>singulär lösning</u>.

<u>Begynnelsevärdesproblem</u>

Hur fixerar vi en bestämd lösning till en ODE?

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{7}$$

där $y_0, \dots, y_{n-1}$ är givna tal och x_0 är en given punkt på $\mathbb{R}$ kallas ett <u>begynnelsevärdesproblem</u>.

(Tänk på x som en tidsvariabel; vi ger villkor på y och dess derivator vid tiden x_0.)

Ex. Betrakta begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' + 2xy^2 = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

$y = \dfrac{1}{x^2+C}$ ger lösningar för alla $C \in \mathbb{R}$.

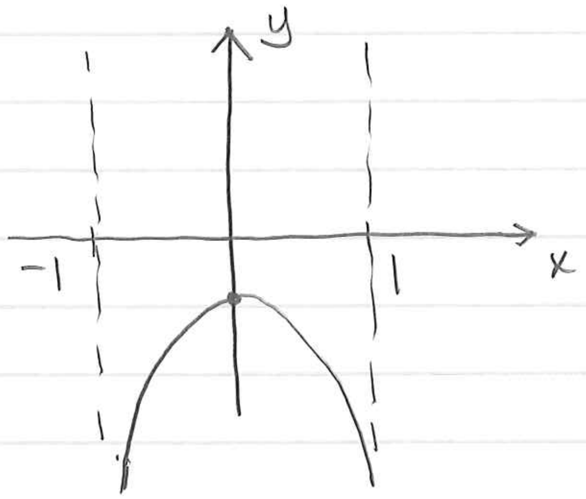
Begynnelsevillkoret $y(0) = -1$ ger

$y(0) = \dfrac{1}{0^2+C} = \dfrac{1}{C} = -1$, dvs. $C = -1$

Vi får

$y(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ för $-1 < x < 1$ (existensintervall)

lösningen $\to -\infty$ då $x \to \pm 1$



Har begynnelsevärdesproblemet andra lösningar?

Sats (Existens och entydighet).

Låt U vara en öppen omgivning av (x_0, y_0) och antag att $f(x,y)$ och

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ är kontinuerliga i U.

Då finns ett intervall $(x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$, så att begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

har en entydig lösning i $(x_0 - h, x_0 + h)$.

Beviset av satsen tillhör en mer avancerad kurs i ODE.

Idé: definiera en lösning iterativt

$y_0(x) = y_0$ ansats

$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\,dt$ löser $y_1'(x) = f(x, y_0(x))$

$\vdots$

$y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{k-1}(t))\,dt$ löser $y_k'(x) = f(x, y_{k-1}(x))$

$\vdots$

Visa att $y_n(x) \to y(x)$ då $n \to \infty$ och att $y(x)$ satisfierar ekvationen.

Exempel på ODE i tillämpningar

Tillväxtmodeller

Till exempel i populationsdynamik

$P(t)$ = populationens storlek vid tiden t
(kontinuerlig variabel)

t.ex antal invånare i en stad, antalet djur av en viss art i ett område, antalet bakterier i en bakteriekultur, eller kapital vid tiden t.

$\frac{dP}{dt}$ = hastigheten (takten) i populationsförändringen
(rate)

Modellantagande:

proportionell mot

Antal födslar per tidsenhet $\propto$ aktuella populationen $\quad bP$ ← "birth rate"

Antalet dödsfall per tidsenhet $\propto$ —"— $\quad mP$ ← "mortality rate"

$$\frac{dP}{dt} = bP - mP = kP \quad , \quad k = b - m$$

$k > 0$ tillväxt, $k < 0$ avtagande

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = kP \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$ har lösningen $P(t) = P_0 e^{kt}$

Radioaktivt sönderfall

$A(t)$ = antalet radioaktiva kärnor i en bit material

$$\frac{dA}{dt} = -cA \quad , \quad c>0 \qquad \text{(avtagande)}$$

$$A(t) = A_0 e^{-ct} \quad , \quad t_{1/2} \text{ halveringstid}$$

$$\frac{1}{2} A_0 = A_0 e^{-ct_{1/2}} \quad , \quad e^{-ct_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

$$-ct_{1/2} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \quad , \quad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{c} .$$

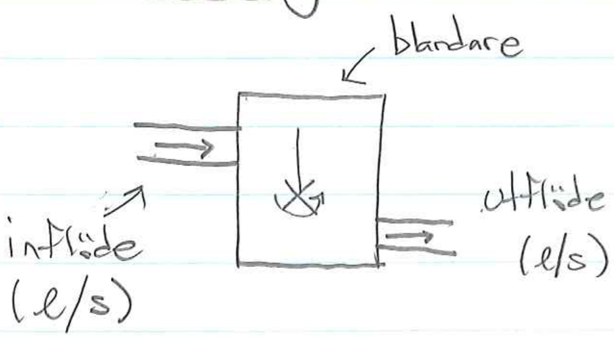
c specificeras ofta som en halveringstid.

Logistiska ekvationen

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1-\frac{P}{D}\right) \quad , \quad D>0$$

↖ tillväxttakten avtar då populationen ökar

Blandningar



$A(t)$ = mängden salt i behållaren

Inflödet innehåller a kg/l salt (koncentration i inflöde)

Inflödet = b l/s = Utflödet

V = behållarens volym

koncentration i behållaren

$$\frac{dA}{dt} = ab - \frac{A}{V} b$$

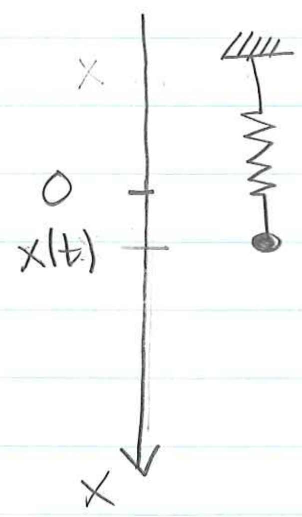
inflödestakt   utflödestakt

$$\frac{dA}{dt} = ab - \frac{b}{V} A .$$

<u>Ex.</u> <u>Dämpad svängning</u>

x = läge vid tiden t, m = massa

Newtons andra lag: $m \dfrac{d^2x}{dt^2} = F$ kraft



0 = jämviktsläge

Fjäderkraft $= -kx(t)$ (Hookes lag)

Friktion $= -\gamma \dfrac{dx}{dt}$

$k, \gamma > 0$ konstanter

Drivande kraft $= f(t)$

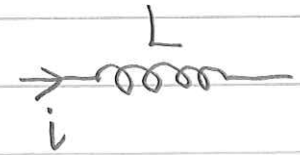
Newtons andra lag ger

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma\frac{dx}{dt} - kx(t) + f(t)$$

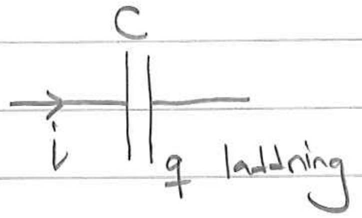
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x(t) = \frac{1}{m}f(t) \qquad (8)$$

Elektrisk krets

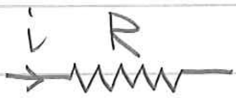
spänningsfall

spole 

$L\dfrac{di}{dt}$ L induktans

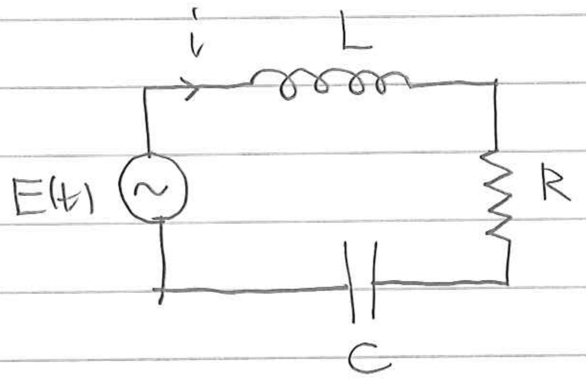
kondensator 

$\dfrac{1}{C}q$, C kapacitans

resistor 

Ri

$$i = \frac{dq}{dt}$$

RLC-krets 

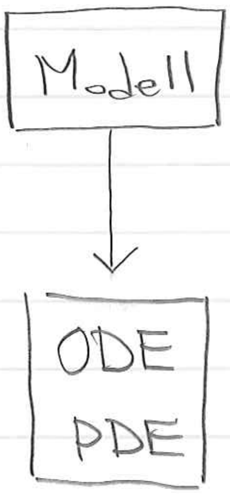
E(t) drivande spänning

$$E(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q$$

Insättning av $i = \frac{dq}{dt}$ ger

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}E(t) \qquad (9)$$

(8) och (9) är samma ODE. Vi ser att en och samma ekvation kan ha olika tolkningar beroende på sammanhang.



- Exakta lösningar, formler

  Speciellt men ger förståelse när de finns.

- Allmän matematisk teori

  Existens och entydighet, regularitet, egenskaper hos lösningar, kvalitativ teori

- Approximativa lösningar

  Numeriska lösningsmetoder i form av algoritmer implementerade i datorer. Nödvändigt i de flesta tillämpningar. Färdig programvara.