Föreläsning 19

SF1633 Differentialekvationer HT16, Kurt Johansson

Blandade tentamensproblem

Ex. I en populationsmodell är den relativa tillväxthastigheten som funktion av tusentalet djur, $P(t)$, given av

$$a - bP(t) \quad , \quad a, b > 0.$$

Modifiera nu modellen så att h djur försäljes per tidsenhet och k djur införskaffas per tidsenhet. Sätt upp en matematisk modell. Låt $a=5$, $b=1$, $h=7$ och $k=3$. Studera långtidsbeteendet för alla startvärden $P(0)=P_0>0$. Kommer populationen att dö ut för några startvärden? Bestäm i så fall tidpunkten för detta.

Lösning:
$$\underbrace{\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}}_{\text{relativ tillväxthastighet}} = a - bP \Leftrightarrow \frac{dP}{dt} = P(a-bP)$$

Modifiering ger

$$\frac{dP}{dt} = P(a-bP) + k - h.$$

De aktuella värdena ger

$$\frac{dP}{dt} = P(5-P) - 4 = -P^2 + 5P - 4 = -(P-1)(P-4) = f(P)$$

Vi får en autonom första ordningens ODE.

$$f(P) = \begin{cases} <0 & \text{då } P<1 \\ =0 & \text{då } P=1,4 \\ >0 & \text{då } 1<P<4 \\ <0 & \text{då } P>4 \end{cases}$$

P är avtagande då $P_0 < 1$. Kan bli 0.
$P(t) \to 4$ då $t \to \infty$ om $1 < P_0 < 4$ eller $P_0 > 4$.

För att avgöra om $P(t)$ kan bli 0 och i så fall när löser vi ekvationen som är separabel:

$$\frac{dP}{(P-1)(P-4)} = -dt \quad , \quad \int \frac{dP}{(P-1)(P-4)} = -\int dt = -t + c_1$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{(P-1)(P-4)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{P-1} + \frac{1}{3}\frac{1}{P-4}$$

så

$$\int \frac{dP}{(P-1)(P-4)} = -\frac{1}{3}\ln|P-1| + \frac{1}{3}\ln|P-4| = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{P-4}{P-1}\right|$$

Vi får

$$\ln\left|\frac{P-4}{P-1}\right| = -3t + 3c_1 \Leftrightarrow \frac{P-4}{P-1} = \underbrace{\pm e^{3c_1}}_{=c_2} e^{-3t}$$

Sätter vi $t=0$ får vi

$$\frac{P_0-4}{P_0-1}=C_2 \Leftrightarrow C_2=\frac{4-P_0}{1-P_0}$$ (vi är intresserade av $P_0<1$)

Alltså

$$\frac{4-P}{1-P}=\frac{4-P_0}{1-P_0}e^{-3t}$$

Antag $P(0)=P_0 \in (0,1)$. Då är $P(t)$ avtagande och $P(t_1)=0$ ger

$$\frac{4-P(t_1)}{1-P(t_1)}=\frac{4-P_0}{1-P_0}e^{-3t_1} \Leftrightarrow 4=\frac{4-P_0}{1-P_0}e^{-3t_1}$$

eller

$$t_1=-\frac{1}{3}\ln\frac{4(1-P_0)}{4-P_0}=\frac{1}{3}\ln\frac{4-P_0}{4(1-P_0)}.$$

Svar: Om $P_0\in(1,\infty)$ gäller $P(t)\to 4$ då $t\to\infty$. Om $P_0=1$ är $P(t)=1$, $t\geq 0$ och om $P_0\in(0,1)$ så gäller att $P=0$ vid tiden $t_1=\frac{1}{3}\ln\frac{4-P_0}{4(1-P_0)}$.

Man kan visa att om $P_0\in(0,1)$ så gäller att $P(t)\to-\infty$ då

$$t\to t_2^-,\quad t_2=\frac{1}{3}\ln\frac{4-P_0}{1-P_0}.$$

Ex. Bestäm en styckvis deriverbar kontinuerlig lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = f(x) = \begin{cases} x & , 0 \le x < 1 \\ 0 & , x \ge 1 \end{cases} \quad , \; y(0) = 2 .$$

Lösning: En första ordningens linjär ekvation kan lösas genom att multiplicera med en integrerande faktor:

$$e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2} .$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^2} y\right) = \begin{cases} x e^{x^2} & , 0 \le x < 1 \\ 0 & , x \ge 1 \end{cases}$$

$$e^{x^2} y = \begin{cases} \int x e^{x^2} dx + c_1 & , 0 \le x < 1 \\ c_2 & , x \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x^2} + c_1 & , 0 \le x < 1 \\ c_2 & , x \ge 1 \end{cases}$$

Alltså

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2} + c_1 e^{-x^2} & , 0 \le x < 1 \\ c_2 e^{-x^2} & , x > 1 \end{cases}$$

$y(0) = \frac{1}{2} + c_1 = 2 \Leftrightarrow c_1 = \frac{3}{2}$. Den lösning vi söker ska vara kontinuerlig. Alltså skall vänster- och höger-gränsvärdena i $x = 1$ vara lika vilket ger

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} e^{-1} = c_2 e^{-1} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2} e + \frac{3}{2} .$$

Svar: $$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2} e^{-x^2} , & 0 \le x < 1 \\ \left(\frac{1}{2} e + \frac{3}{2}\right) e^{-x^2} , & x > 1 \end{cases}$$

Ex. Funktionerna $y_1 = 1+x$, $y_2 = 1+2x$, $y_3 = 1+3x^2$

är lösningar till den linjära ekvationen

$$y'' + py + qy = g \quad , \quad x \in (0,\infty)$$

a) Bestäm den allmänna lösningen till den homogena ekvationen

$$y'' + py + qy = 0, \quad x \in (0,\infty).$$

b) Lös den inhomogena ekvationen med begynnelsevillkoren $y(1) = 2$, $y'(1) = -1$.

Lösning: Vi har differentialoperatorn

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + p\frac{d}{dx} + q$$

och det gäller att $Ly_1 = Ly_2 = Ly_3 = g$.
Sätt $f_1(x) = y_2(x) - y_1(x)$ och $f_2(x) = y_3(x) - y_1(x)$.
Då är

$$Lf_1 = Ly_2 - Ly_1 = g - g = 0$$
$$Lf_2 = Ly_3 - Ly_1 = g - g = 0,$$

så f_1 och f_2 löser den homogena ekvationen.
Vi vill visa att $f_1(x) = x$ och $f_2(x) = 3x^2 - x$
är linjärt oberoende.

Wronskianen

$$W(f_1,f_2)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3x^2-x \\ 1 & 6x-1 \end{vmatrix} = 3x^2 \neq 0$$

då $x \in (0,\infty)$. Alltså är $\{f_1,f_2\}$ en fundamentalmängd och den allmänna lösningen ges av

$$y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = c_1 x + c_2(3x^2-x).$$

b) $y_1(x) = 1+x$ är en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen. Den allmänna lösningen till den inhomogena ekvationen ges då av

$$y = 1+x+c_1x+c_2(3x^2-x).$$

Villkoret ger

$$y' = 1+c_1+c_2(6x-1)$$

$$\begin{cases} y(1) = 2+c_1+2c_2 = 2 \\ y'(1) = 1+c_1+5c_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1+2c_2 = 0 \\ c_1+5c_2 = -2 \end{cases}$$

villkoret ger $c_1 = \frac{4}{3}$, $c_2 = -\frac{2}{3}$

$$y = 1+x+\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}(3x^2-x) = 1+3x-2x^2.$$

Svar: $y = 1+3x-2x^2$.

Ex. Låt y_1 och y_2 vara två lösningar till

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad , \quad x \in (a,b),$$

där p och q är två kontinuerliga funktioner. Låt $W(x)$ vara Wronskianen av y_1 och y_2 och låt $x_0 \in (a,b)$. Visa att

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \quad , \; x \in (a,b). \quad (\underline{\text{Abels formel}})$$

Lösning: Vi vet att

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \; , \; y_2'' + py_2' + qy_2 = 0 . \qquad (1)$$

Vi ser att formeln ger den entydiga lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} u' + p(x)u = 0 \quad , \; x \in (a,b) \\ u(x_0) = W(x_0) , \end{cases} \qquad (2)$$

ty en integrerande faktor ges av

$$e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} ,$$

eftersom $P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t)dt$ är en primitiv funktion till $p(x)$. Vi får

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} u \right) = 0 \Rightarrow u = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

Vi får

$$u(x_0) = c e^{-\int_{x_0}^{x_0} p(t)dt} = c,$$

villkor ger $c = u(x_0) = W(x_0)$. Vi vill visa att W satisfierar ekvationen i (2).

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$W' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''.$$

(1) ger $y_1'' = -py_1' - qy_1$, $y_2'' = -py_2' - qy_2$, varför

$$W' = y_1(-py_2' - qy_2) - y_2(-py_1' - qy_1)$$
$$= p(y_2 y_1' - y_1 y_2') - qy_1 y_2 + qy_2 y_2 = -pW.$$

Ex. Differentialekvationen $t^2y'' - 2y = 0$, $t>0$ har lösningar på formen $y = t^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestäm den allmäna lösningen till den inhomogena ekvationen

$$t^2 y'' - 2y = 3t^2 - 1, \quad t>0.$$

Lösning: Insättning av $y = t^\alpha$ i ekvationen ger

$$t^2 \cdot \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} - 2t^\alpha = 0 \qquad \text{(homogena)}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha^2 - \alpha - 2)t^\alpha = 0, \quad t>0$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1 \text{ eller } \alpha = 2$$

Vi får två linjärt oberoende lösningar

$$y_1 = t^{-1} \text{ och } y_2 = t^2$$

En partikulärlösning till den inhomogena ekvationen kan bestämmas med hjälp av variation av parametrarna

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 \qquad \left[\begin{array}{l} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = f(t) \end{array} \right]$$

u_1 och u_2 ges av

$$u_1' = -\frac{y_2 f(t)}{W}, \quad u_2' = \frac{y_1 f(t)}{W},$$

där $f(t)$ är högerledet och W Wronskianen.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^{-1} & t^2 \\ -t^{-2} & 2t \end{vmatrix} = 3$$

Ekvationen måste skrivas på normalform

$$y'' - \frac{2}{t^2}y = 3 - \frac{1}{t^2} = f(t)$$

$$u_1' = -\frac{t^2(3-\frac{1}{t^2})}{3} = -t^2 + \frac{1}{3}$$

$u_1 = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{3}t$ är en lösning

$$u_2' = \frac{t^{-1}(3-\frac{1}{t^2})}{3} = \frac{1}{t} - \frac{1}{3}\frac{1}{t^3}$$

$u_2 = \ln t + \frac{1}{6}\frac{1}{t^2}$ är en lösning $(t>0)$

En partikulärlösning ges av

$$y_p = \left(-\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{3}t\right)\frac{1}{t} + \left(\ln t + \frac{1}{6}\frac{1}{t^2}\right)t^2$$

$$= -\frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3} + t^2\ln t + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}t^2 + t^2\ln t + \frac{1}{2}$$

Den allmänna lösningen ges av

$$y = c_1 t^{-1} + c_2 t^2 - \frac{1}{3}t^2 + t^2 \ln t + \frac{1}{2}$$

$$= c_1 t^{-1} + c_3 t^2 + t^2 \ln t + \frac{1}{2}. \quad \left(c_3 = c_2 - \frac{1}{3}\right)$$