

Föreläsning 18

SF1633 Differentialekvationer HT16, Kurt Johansson

Derivator av Laplacetransformen

Låt $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. Då är

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} F(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} (e^{-st} f(t)) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} (-t) f(t) dt = - \int_0^{\infty} e^{-st} t f(t) dt = -\mathcal{L}\{t f(t)\}(s). \end{aligned}$$

↑
inte självklart

Upprepad användning ger

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

Ex. Beräkna $\mathcal{L}\{t \cos kt\}$. Vi får att

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t \cos kt\} &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\cos kt\}(s) = -\frac{d}{ds} \frac{s}{s^2+k^2} \\ &= -\frac{s^2+k^2 - s \cdot 2s}{(s^2+k^2)^2} = \frac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}. \end{aligned}$$

Def. Låt f och g vara två styckvis kontinuerliga funktioner på $[0, \infty)$. Då definieras faltningen $f * g$ av f och g genom

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

Observera att

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad \left[\begin{array}{l} r=t-\tau \\ dr=-d\tau \end{array} \right] = \int_0^t f(t-r)g(r)dr \\ = (g * f)(t).$$

● Ex Beräkna $t * \sin 2t$, Definitionen ger

$$t * \sin t = \int_0^t \tau \sin 2(t-\tau) d\tau = \left[\frac{\tau}{2} \cos 2(t-\tau) \right]_0^t$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^t \cos 2(t-\tau) d\tau = \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \sin 2(t-\tau) \right]_0^t = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t.$$

En viktig egenskap hos Laplacetransformen är att den gör om faltring till multiplikation.

● Sats $\mathcal{L}\{f * g\}(s) = F(s)G(s)$

● om $\mathcal{L}\{f\} = F$ och $\mathcal{L}\{g\} = G$.

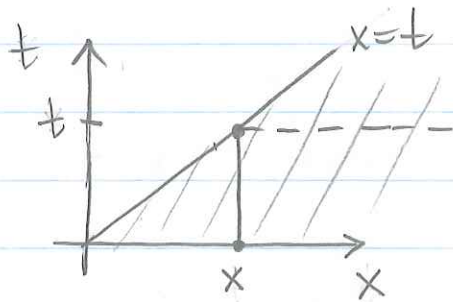
Bevis: Vi har att

$$F(s)G(s) = \left(\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right) \left(\int_0^\infty e^{-sr} g(r) dr \right) \\ = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(t+r)} f(t)g(r) dr dt = \int_0^\infty f(t) \left(\int_0^\infty e^{-s(t+r)} g(r) dr \right) dt$$

I den inre integralen sätter vi $x = t+r$ som ny variabel

istället för r (t fix), $r = x - t$, $dr = dx$ och integrationen i x blir från t till ∞ . Vi får

$$\int_0^{\infty} f(t) \left(\int_t^{\infty} e^{-sx} g(x-t) dx \right) dt$$



Byt integrationsordning, dvs. integrera först m.a.p t och sedan m.a.p. x . Givet x varierar t mellan 0 och x .

Vi får

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \left(\int_0^x f(t) g(x-t) dt \right) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} (f * g)(x) dx$$

$$= \mathcal{L}\{f * g\}(s).$$

Ex.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t * \sin 2t\} &= \mathcal{L}\{t\} \mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{2}{s^2 + 4} = \frac{2}{s^2(s^2 + 4)} \\ &= \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{2(s^2 + 4)} \end{aligned}$$

Alltså är

$$\begin{aligned} t * \sin t &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s^2} - \frac{1}{2(s^2 + 4)}\right\} = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 4}\right\} \\ &= \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t, \text{ precis som ovan.} \end{aligned}$$

Om vi tar $g \equiv 1$ (g identiskt = 1) så får vi

$$(f * 1)(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Eftersom $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ så ger satsen en formel för Laplacetransformen av en integral:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

Ex. Beräkna $\mathcal{L}\left\{t \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau\right\}(s)$

$$= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\left\{\int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau\right\}(s) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s} \mathcal{L}\{te^{-t}\}(s)\right) \quad (*)$$

Nu är

$$\mathcal{L}\{te^{-t}\}(s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{e^{-t}\} = -\frac{d}{ds} \frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Alltså

$$(*) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s(s+1)^2}\right) = \frac{(s+1)^2 + s \cdot 2(s+1)}{s^2 (s+1)^4} = \frac{3s+1}{s^2 (s+1)^3}.$$

Svar: $\frac{3s+1}{s^2 (s+1)^3}$.

Volterra's integralekvation

Låt $g(t)$ och $h(t)$ varaända funktioner på $[0, \infty)$.
Vi söker $f(t)$ som satisfierar integralekvationen

$$f(t) = g(t) + \int_0^t f(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

vilken med hjälp av faltning kan skrivas som

$$f = g + f * h.$$

Laplacetransformering ger

$$F(s) = G(s) + F(s)H(s) \Rightarrow F(s) = \frac{G(s)}{1-H(s)}.$$

Ex Lös integralekvationen

$$f(t) = 2t - 4 \int_0^t f(\tau) \sin(t-\tau) d\tau$$

Laplacetransformering ger

← Laplacetransf. av $\sin t$

$$F(s) = \frac{2}{s^2} - 4F(s) \frac{1}{1+s^2}$$

⇔

$$\left(1 + \frac{4}{1+s^2}\right) F(s) = \frac{2}{s^2} \Rightarrow \frac{5+s^2}{1+s^2} F(s) = \frac{2}{s^2}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{2(1+s^2)}{s^2(5+s^2)} = \frac{2}{5} \frac{1}{s^2} + \frac{8}{5} \frac{1}{s^2+5}$$

Om $x = s^2$ får vi

$$\frac{1+x}{x(5+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{5+x} = \frac{(A+B)x + 5A}{x(5+x)}$$

$$A = \frac{1}{5}, B = \frac{4}{5}$$

└

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{s^2} + \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{s^2 + (\sqrt{5})^2}$$

Invers Laplacetransformering ger

$$f(t) = \frac{1}{5}t + \frac{8}{5\sqrt{5}} \sin t\sqrt{5}.$$

Diracs deltafunktion (= enhetsimpuls)

Diracs deltafunktion $\delta(t-t_0)$, $t_0 > 0$, är en "funktion" sådan att

$$\int_0^{\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0)$$

för alla kontinuerliga (eller tillräckligt hyggliga) funktioner f . Speciellt, med $f \equiv 1$, får vi

$$\int_0^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1$$

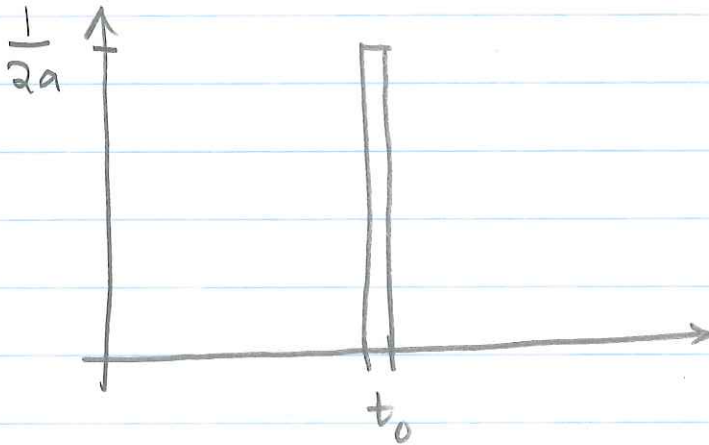
Problemet är att ingen funktion δ uppfyller detta utan δ är en slags "generaliserad funktion".

$\delta(t-t_0)$ är en enhetsimpuls vid tiden t_0 .

En approximation ges av

$$\delta_a(t-t_0) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 \leq t < t_0 - a \\ \frac{1}{2a} & \text{om } t_0 - a \leq t < t_0 + a \\ 0 & \text{om } t > t_0 + a \end{cases}$$

dar a är litet



I lämplig mening gäller $\delta(t-t_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(t-t_0)$, ty

$$\int_0^{\infty} f(t) \delta_a(t-t_0) dt = \frac{1}{2a} \int_{t_0-a}^{t_0+a} f(t) dt \approx \frac{1}{2a} \int_{t_0-a}^{t_0+a} f(t_0) dt = f(t_0).$$

↑
f konst.

Approximationen blir bättre och bättre ju mindre a är.

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f(t) \delta_a(t-t_0) dt = f(t_0).$$

Vi ser att $\delta(t-t_0)$ ska vara 0 om $t \neq t_0$ och $+\infty$ om $t = t_0$. En sådan funktion är inte värddefinierad och går inte att integrera.

Laplacestransformen blir

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t-t_0) dt = e^{-st_0}, \quad t_0 > 0.$$

Vi kan låta $t_0 \rightarrow 0+$ så att vi får en enhetsimpuls i $t=0$.

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1.$$

Ex. Lös ekvationen $y'' + y = \delta(t-2\pi)$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Laplacestransformering ger

↑ Vi klickar till en odämpad fjäder vid tiden $t=2\pi$.

$$s^2 F(s) + F(s) = e^{-2\pi s}$$

$$F(s) = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}; \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = \sin t$$

Kom ihåg: $\mathcal{L}\{g(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}G(s)$.

Alltså är

$$f(t) = U(t-2\pi) \sin(t-2\pi) = U(t-2\pi) \sin t$$



Ingenting händer till $t=2\pi$ därefter en sinusvågning $\sin t$.

Kommentarer

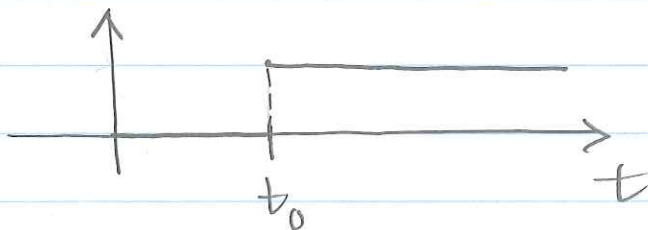
1) Observera att formellt är enligt våra räkneregler

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}U(t-t_0)\right\} = s\mathcal{L}\{U(t-t_0)\} - \underbrace{U(-t_0)}_{=0}$$

$$= s \cdot \frac{1}{s} e^{-st_0} = e^{-st_0}$$

så vi borde ha

$$\delta(t-t_0) = \frac{d}{dt}U(t-t_0)$$



Derivatan av stegfunktionen är $= 0$ överallt utom i språngpunkten där den är ∞ , vad nu det betyder!

2) Beträkta differentialekv.

$$P(D)y = \delta(t), \text{ där } P \text{ är ett polynom.}$$

Laplacestransformering ger (homogent begynnelsevillkor)

$$P(s)Y(s) = 1 \Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{P(s)} = \text{"överföringsfunktion } W(s)\text{.}$$

Överföringsfunktionen är Laplacestransformen av responsen på en enhetsimpuls.

System av ODE med konstanta koefficienter

Ex. Lös systemet

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 2y + 2U(t-1) \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y + U(t-1) \end{cases}$$

med begynnelsevillkor $x(0) = 0, y(0) = 1/2$.

Laplacetransformera. $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s), \mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$.

$$\begin{cases} sX(s) - x(0) = 4X(s) - 2Y(s) + \frac{2}{s}e^{-s} \\ sY(s) - y(0) = 3X(s) - Y(s) + \frac{1}{s}e^{-s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-4)X(s) + 2Y(s) = \frac{2}{s}e^{-s} \\ -3X(s) + (s+1)Y(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s}e^{-s} \end{cases} \quad (*)$$

┌ Kramers regel

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

För (*) får vi

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s-4 & 2 \\ -3 & s+1 \end{vmatrix} = (s-4)(s+1)+6 = s^2-3s+2 \\ = (s-1)(s-2)$$

$$\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{s}e^{-s} & 2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{s}e^{-s} & s+1 \end{vmatrix} = \frac{2}{s}(s+1)e^{-s} + 1 - \frac{2}{s}e^{-s}$$

$$= -1 + 2e^{-s}$$

Alltså

$$X(s) = \frac{-1 + 2e^{-s}}{(s-1)(s-2)} = -\frac{1}{(s-1)(s-2)} + \frac{2}{(s-1)(s-2)}e^{-s}$$

Vi måste beräkna den inversa Laplacetransformen.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}\right\} = e^{2t} - e^t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)(s-2)}e^{-s}\right\} = (e^{2(t-1)} - e^{t-1})U(t-1)$$

Detta ger

$$x(t) = -e^{2t} + e^t + 2(e^{2(t-1)} - e^{t-1})U(t-1)$$

Aterstår att beräkna y(t).

Vi får

$$x(t) = e^{2t} - e^t + (-3 + 2e^{-2t} - 3e^{-2t})U(t-1)$$

$$\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s-4 & \frac{2}{s}e^{-s} \\ -3 & \frac{1}{2} + \frac{1}{s}e^{-s} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{2}s-2 + e^{-s} - \frac{4}{s}e^{-s} + \frac{6}{s}e^{-s} = \frac{1}{2}s-2 + e^{-s} + \frac{2}{s}e^{-s}$$

Vi får

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{2}s-2 + e^{-s} + \frac{2}{s}e^{-s}}{(s-1)(s-2)} = \frac{\frac{1}{2}s-2}{(s-1)(s-2)} + \frac{s+2}{s(s-1)(s-2)}e^{-s}$$

Noär

$$\frac{s/2-2}{(s-1)(s-2)} = \frac{3}{2} \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s/2-2}{(s-1)(s-2)} \right\} = \frac{3}{2}e^t - e^{2t}$$

$$\frac{s+2}{s(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s} - \frac{3}{s-1} + \frac{2}{s-2}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+2}{s(s-1)(s-2)} e^{-s} \right\} = (1 - 3e^{t-1} + 2e^{2(t-1)})U(t-1)$$

Sammanfattningsvis:

$$x(t) = \begin{cases} -e^{2t} + e^t & \text{om } 0 \leq t < 1 \\ (-2e^{-1}-1)e^{2t} + (1-2e^{-1})e^t & \text{om } t > 1 \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} -e^{2t} + \frac{3}{2}e^t & \text{om } 0 \leq t < 1 \\ 1 + (-1+2e^{-1})e^{2t} + (\frac{3}{2}-3e^{-1})e^t, & \text{om } t > 1 \end{cases}$$

Kontrollera genom insättning!