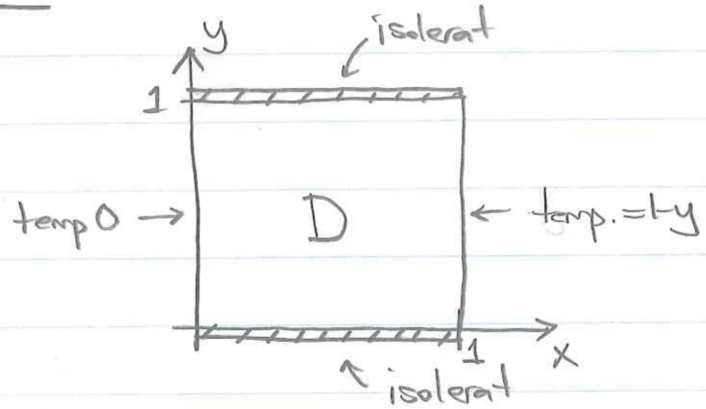
Föreläsning 16

SF1633 Differentialekvationer HT16, Kurt Johansson

Laplace ekvation

Ex. (12.5.5 i boken)



Stationär temperatur-fördelning i en platta

$u(x,y)$ = temperaturen i punkten (x,y), oberoende av t

Värmeledningsekvationen i planet är

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{=0} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \left(\text{Laplace ekvation}\right)$$

Vi får randvärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ (x,y) \in D & (1) \\ u(0,y) = 0, \ u(1,y) = 1-y, \ 0<y<1 & (2) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = 0, \ 0<x<1 & (3) \end{cases}$$

Vi söker lösningar på produktform (separation av variabler)

$$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$$

Laplace ekvation ger

$$X''Y + XY'' = 0 \underset{\text{dela med } XY}{\Rightarrow} \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \text{konst.} = \alpha^2$$

$$\begin{cases} X'' - \alpha^2 X = 0 \\ Y'' + \alpha^2 Y = 0 \end{cases}$$

(ger periodiska lösningar i y-led, vi får många lösningar som uppfyller (3))

$$Y(y) = c_1 \cos\alpha y + c_2 \sin\alpha y$$

(3) ger $X(x)Y'(0) = 0, \quad 0<x<1 \quad , Y'(0)=0$

$X(x)Y'(1) = 0 \quad , 0<x<1 \quad , Y'(1)=0$

$$Y'(y) = -\alpha c_1 \sin\alpha y + \alpha c_2 \cos\alpha y$$

$$0 = Y'(0) = \alpha c_2 \Rightarrow c_2 = 0 \text{ eller } \alpha = 0$$

$$0 = Y'(1) = -\alpha c_1 \sin\alpha + \underbrace{\alpha c_2 \cos\alpha}_{=0} \quad , c_1 \neq 0$$

$\sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = n\pi$

$Y_n(y) = c_1 \cos n\pi y \quad , \; n \geq 0$

Vi får

$X'' - \alpha^2 X = 0 \Leftrightarrow X = d_3 e^{\alpha x} + d_4 e^{-\alpha x}$

om $\alpha \neq 0$. Alternativt kan vi utnyttja $\cosh \alpha x$
$\sinh \alpha x$,

$$\cosh \alpha x = \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} \quad , \quad \sinh \alpha x = \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2}$$

som alternativ fundamentalmängd, dvs.

$$X = c_3 \cosh \alpha x + c_4 \sinh \alpha x$$

ger den allmänna lösningen.

Om $\alpha = 0$ får vi $X(x) = d_1 x + d_2$, vilket är fallet $n = 0$.

Detta ger lösningarna

$$U_0(x,y) = D_1 x + D_2 \qquad (D_1 = c_1 d_1 , D_2 = c_1 d_2)$$

$$U_n(x,y) = (A_n \cosh n\pi x + B_n \sinh n\pi x) \cos n\pi y$$

Superpositionsprincipen ger nu att

$$u(x,y) = D_1 x + D_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh n\pi x + B_n \sinh n\pi x) \cos n\pi y$$

satisfierar (1) och (3).

Vi måste bestämma D_1, D_2, A_n och B_n så att (2) gäller,

$$u(0,y) = D_2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\pi y \quad , 0 \le y \le 1 \quad \Rightarrow D_2 = 0, A_n = 0, n \ge 1$$

$$u(1,y) = D_1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh n\pi \cos n\pi y = 1 - y \quad , 0 < y < 1 .$$

Vi vill utveckla $1-y$, $0<y<1$, i en cosinusserie. En räkning ger

$$1 - y = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2} \cos n\pi y \quad , 0<y<1$$

varur

$$D_1 = \frac{1}{2} \quad , B_n = \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2 \sinh n\pi} .$$

<u>Svar:</u> Den stationära temperaturfördelningen ges av

$$u(x,y) = \frac{1}{2} x + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2} \frac{\sinh n\pi x}{\sinh n\pi} \cos n\pi y .$$

Laplacetransformen

Transformmetoder för att lösa differentialekvationer har strukturen:

$$\begin{tikzcd}
\text{Diff. ekv.} \arrow[r, "T", "\text{transform}"'] \arrow[d] & \text{Transformerad ekvation} \arrow[d] \\
\text{Lösning(ar)} & \text{Lösning(ar) på transformsidan} \arrow[l, "T^{-1}"', "\text{invers transform}"]
\end{tikzcd}$$

Laplacetransformen är ett exempel på en sådan transform som är användbar i många sammanhang.

<u>Ex.</u>

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t), \quad t \geq 0 \quad \text{(elektrisk krets)}$$

$\uparrow$ input, drivande funktion

Söker $q(t)$, $t \geq 0$ givet $q(0), q'(0)$ och $E(t)$, $t \geq 0$; systemet "slås på" vid tiden 0.

Vi vill alltså transformera funktioner definierade på $[0,\infty)$.

Def. Låt $f(t)$ vara definierad då $t \geq 0$.
Integralen

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \qquad (\text{funktion av } s \in \mathbb{R})$$

kallas Laplacetransformen av f förutsatt att integralen konvergerar.

$s \to \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ ger en ny funktion, Laplacetransformen av f.

$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ är ett vanligt skrivsätt.

Ex. Beräkna $\mathcal{L}\{e^{4t}\}(s)$

$$\int_0^\infty e^{-st} e^{4t}\,dt = \int_0^\infty e^{(4-s)t}\,dt = \lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{(4-s)t}\,dt$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left[\frac{e^{(4-s)t}}{4-s} \right]_0^R = \lim_{R\to\infty} \frac{e^{(4-s)R}-1}{4-s} = \frac{1}{s-4}$$

$s \neq 4$

om $s > 4$; annars divergent.

$$\mathcal{L}\{e^{4t}\}(s) = \frac{1}{s-4}$$

Laplacetransformen finns i tabeller för många grundläggande funktioner.

Ex. $\mathcal{L}\{\sinh kt\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$, $\mathcal{L}\{\cosh kt\} = \dfrac{s}{s^2+k^2}$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (\text{se nedan})$$

$\mathcal{L}$ är en linjär transformation:

$$\mathcal{L}\{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} = c_1\mathcal{L}\{f(t)\} + c_2\mathcal{L}\{g(t)\},$$

vilket följer omedelbart från definitionen.

Vi vill visa en existenssats för Laplacetransformationen.

Def. f sägs vara av exponentiell typ om det finns konstanter $c, M > 0$ och $T > 0$ så att

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \quad \text{för alla } t > T.$$

Ex. polynom, e^{at}, $\sinh kt$ är av exponentiell typ

e^{t^2} är ej av exponentiell typ

$$e^{t^2} \leq Me^{ct} = e^{ct+\ln M} \quad \text{för alla } t > T$$

ger

$$\underbrace{t^2 \leq ct + \ln M}_{\text{falskt om } t \text{ tillräckligt stort.}} \quad \text{för alla } t > T$$

Sats Om f är styckvis kontinuerlig och av exponentiell typ så existerar Laplacetransformen av f, $\mathcal{L}\{f\}(s)$ om $s > c$.

Bevis: Se boken. Använd jämförelsetestet för konvergens av generaliserade integraler:

$$|e^{-st} f(t)| \leq M e^{(c-s)t}, \quad t \geq T$$

(Gäller för alla $t \geq 0$ om vi ev. ökar M.)

↑ ger konvergent integral då $s > c$. ∎

Av att e^{ct} har Laplacetransform $\frac{1}{s-c} \to 0$ då $s \to \infty$ följer också

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \to 0 \text{ då } s \to \infty,$$

se boken för detaljer.

Ex. $f(t) = t^n$. För varje $c > 0$ gäller

$$t^n < e^{ct} \quad \text{för alla tillräckligt stora } t.$$

⌈ $\Leftrightarrow \; n \ln t < ct \; \Leftrightarrow \; \dfrac{\ln t}{t} < \dfrac{c}{n}$.

Vi vet att $\dfrac{\ln t}{t} \to 0$ då $t \to \infty$, varför

$$\frac{\ln t}{t} < \frac{c}{n} \quad \text{bara } t \text{ är tillräckligt stort.}$$ ⌋

Alltså existerar $\mathcal{L}\{t^n\}(s)$ för alla $s>0$.

Låt $I_n = \mathcal{L}\{t^n\}(s)$, $n \geq 0$.

$$I_n = \int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt = \left[t^n \frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1} e^{-st}\,dt$$

↑
partiell integration

$$= \frac{n}{s} I_{n-1} \quad \text{om } n \geq 1$$

Vi har att

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{s}$$

Alltså är

$$I_n = \frac{n}{s} I_{n-1} = \frac{n(n-1)}{s^2} I_{n-2} = \dots = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{s^n}\cdot I_0$$

$$= \frac{n!}{s^{n+1}}.$$