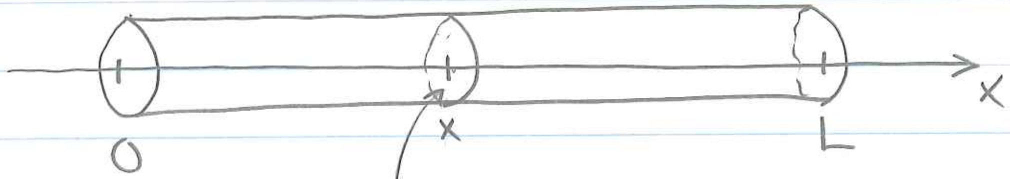
Föreläsning 15

SF1633 Differentialekvationer HT16, Kurt Johansson

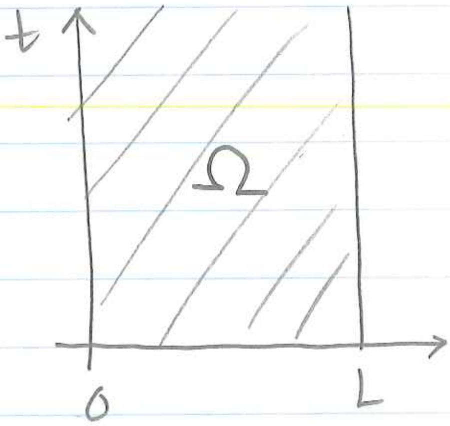
Värmeledningsekvationen

Betrakta temperaturen i en smal kropp, t.ex en smal cylinder, och antag att längsidorna är isolerade och att temperaturen bara varierar längs cylindern:



$u(x,t)$ = temperaturen i tvärsnittet vid x vid tiden t

$(x,t) \in [0,L] \times [0,\infty) = \Omega$



Temperaturen $u(x,t)$ satisfierar ekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

där k är en materialkonstant (värmediffusivitet)(*). Samma ekvation beskriver också diffusion; u är då koncentrationen av ett ämne vid x vid tiden t och k en diffusionskonstant. (Värmeledningsekvationen eller diffusionsekvationen)

Vi behöver lämpliga randvillkor på $\partial\Omega$.

(*) eller temperaturledningsförmåga

$u(x,0) = f(x)$, $0<x<L$ (begynnelsevillkor)

Då $x=0, t>0$ eller $x=L, t>0$ kan vi lägga olika typer av villkor (randvillkor på kroppen)

$u(0,t) = u_0$, $u(L,t) = u_1$, $t>0$ fix temperatur i ändarna (Dirichlet)

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$, $t>0$ isolerade ändar (Neuman)

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -h(u(0,t) - u_m)$, $t>0$ flöde av värme genom ändpunkterna. (Robin)

$h>0$ konstant

↑ omgivande temp.

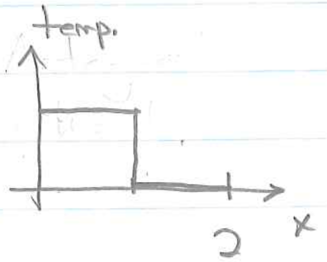
$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = -h(u(L,t) - u_m)$, $t>0$

Vi kan också ha kombinationer av dessa t.ex. isolerad i ena änden och fix temperatur i den andra.

Ex. Betrakta ett rör av längd 2, $0<x<2$, och antag att båda ändarna är isolerade. Om den initiala temperaturfördelningen är

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } 0<x<1 \\ 0 & \text{om } 1<x<2 \end{cases},$$

bestäm temperaturen $u(x,t)$ vid tiden t.



Vi vill alltså lösa randvärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , 0<x<L, t>0 \\ u(x,0) = f(x) & , 0<x<L \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(L,t) = 0 & , t>0 \end{cases}$$

där $L=2$ och $f(x)$ är given som ovan.

Använd variabelseparation $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \text{ ger } kX''T = XT'$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda \quad \text{(konstant)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = X'(0)T(t) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = X'(L)T(t) = 0$$

Lösningar med $T(t)=0$ för alla t är inte intressanta eftersom detta bara ger den triviala lösningen. Alltså $X'(0) = X'(L) = 0$. Vi får

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & , 0<x<L \\ X'(0) = X'(L) = 0 \end{cases}$$

$$T' = -\lambda h T \quad \Leftrightarrow \quad T(t) = c_3 e^{-\lambda h t}$$

$h > 0$. Verkar rimligt att söka lösningar med $\lambda > 0$, annars växer temperaturen exponentiellt i tiden. Skriv $\lambda = \alpha^2 > 0$.

$$X'' + \alpha^2 X = 0 \Leftrightarrow X(x) = c_1 \cos\alpha x + c_2 \sin\alpha x$$

$$X'(x) = -\alpha c_1 \sin\alpha x + \alpha c_2 \cos\alpha x, \quad X'(0) = \alpha c_2 = 0, \quad c_2 = 0$$

Vi vill ha icke-triviala lösningar dvs. $c_1 \neq 0$. Då måste

$$\sin\alpha L = 0 \Leftrightarrow \alpha L = n\pi, \, n \in \mathbb{Z}, \quad \alpha = \frac{n\pi}{L}, \, n \in \mathbb{Z}.$$

Alltså,

$$X(x) = c_1 \cos\frac{n\pi}{L}x, \quad T(t) = c_3 e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt}, \quad n \geq 0$$

Ansats till lösning genom superposition ger

$$u(x,t) = \underbrace{\frac{A_0}{2}}_{\uparrow\, n=0} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt} \cos\frac{n\pi}{L}x$$

Vi vill också att begynnelsevillkoret $u(x,0) = f(x)$ ska vara uppfyllt, dvs.

$$u(x,0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{L}x = f(x).$$

Detta ger (utveckla $f(x)$ i cosinusserie i $[0,L]$).

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

I vårt fall får vi ($f(x)$ som ovan och $L=2$)

$$A_n = \int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx = \int_0^1 \cos\frac{n\pi}{2}x\,dx = \left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\ , \quad n>0$$

$$n=2m\ , \quad A_{2m} = \frac{1}{m\pi}\sin\pi m = 0\ , \quad m\geq 1$$

$$n=2m-1\ , \quad A_{2m-1} = \frac{2}{(2m-1)\pi}\sin\frac{(2m-1)\pi}{2} = \frac{2(-1)^{m-1}}{(2m-1)\pi}$$

$$A_0 = \int_0^1 dx = 1\ .$$

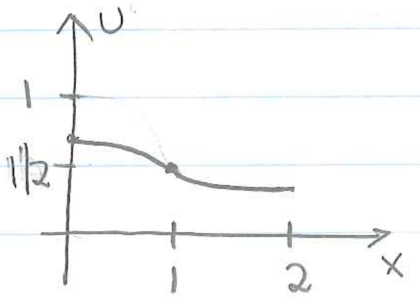
Vi får alltså lösningen

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{m-1}}{(2m-1)\pi}\underbrace{e^{-\frac{(2m-1)^2\pi^2}{4}kt}}_{\to 0 \text{ då } t\to\infty\text{, fortare ju större } m \text{ är}}\cos\frac{(2m-1)\pi}{2}x$$

$u(x,t)\to\frac{1}{2}$ då $t\to\infty$, verkar rimligt.

Kastar vi alla termer utom $m=1$ får vi

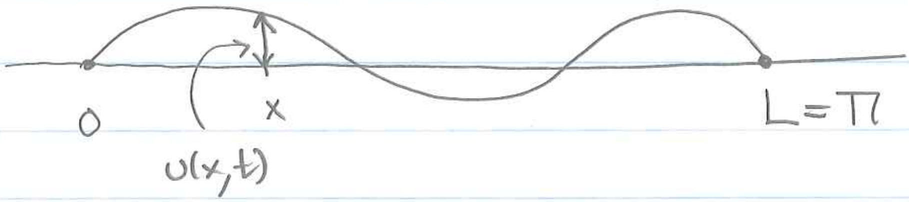
$$u(x,t)\approx\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}e^{-\frac{\pi^2}{4}kt}\cos\frac{\pi}{2}x$$



(bra approximation om t inte alltför liten)

Ex. (Övn. 9 s. 471 i boken). Om vi har en svängande sträng och svängningen sker i ett medium som ger en friktion proportionell mot den momentana hastigheten får vi en vågekvation på formen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \begin{pmatrix} a = 1 \\ 0 < \beta < 1 \end{pmatrix}$$



Fäst i ändarna

Antag att strängen startar med $u(x,0) = f(x)$ och då är i vila. Bestäm $u(x,t)$. Vi har randvillkoren:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad , t > 0$$

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 < x < \pi$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad , \quad 0 < x < \pi .$$

Variabelseparation: $u(x,t) = X(x)T(t)$

$$X''(x)T(t) = X(x)T''(t) + 2\beta X(x)T'(t)$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'' + 2\beta T'}{T} = -\lambda^2$$

vi vill ha periodiska lösningar i x.

$X'' + \alpha^2 X = 0$ ger

$X = c_1 \cos\alpha x + c_2 \sin\alpha x$

$X(0) = X(\pi) = 0$ ger $c_1 = 0$, $\alpha = n$, $n \geq 1$ (räcker)
och $X(x) = c_2 \sin nx$.
För T får vi ekvationen

$$T'' + 2\beta T' + n^2 T = 0 \qquad (\alpha = n)$$

Karakteristiska ekvationen

$$r^2 + 2\beta r + n^2 = 0 \Leftrightarrow r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - n^2}$$

Då $0 < \beta < 1$ är $\beta^2 - n^2 < 0$ så vi får icke-reella lösningar

$$r = -\beta \pm i\gamma_n \quad \text{där } \gamma_n = \sqrt{n^2 - \beta^2}$$

$$\begin{cases} T(t) = e^{-\beta t}(c_3 \cos\gamma_n t + c_4 \sin\gamma_n t) \\ X(x) = c_2 \sin nx \end{cases}$$

Superposition ger nu

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta t}(A_n \cos\gamma_n t + B_n \sin\gamma_n t)\sin nx$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = f(x), \quad 0 < x < \pi$$

(Begynnelsevillkor)

ger att

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad , \quad n \geq 1 \qquad (*)$$

För det andra begynnelsevillkoret behöver vi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[-\beta e^{-\beta t}(A_n\cos\gamma_n t + B_n\sin\gamma_n t)$$

$$+ e^{-\beta t}(-\gamma_n A_n\sin\gamma_n t + \gamma_n B_n\cos\gamma_n t)\Big]\sin nx$$

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ ger

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-\beta A_n + \gamma_n B_n)\sin nx = 0$$

Detta ger $\quad -\beta A_n + \gamma_n B_n = 0 \Rightarrow B_n = \frac{\beta A_n}{\gamma_n}$.

Vi får

$$u(x,t) = e^{-\beta t}\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(\cos\gamma_n t + \frac{\beta}{\gamma_n}\sin\gamma_n t\right)\sin nx$$

där A_n ges av $(*)$

$e^{-\beta t}$ ger en dämpning av svängningen.

Det finns många andra PDE som man kan studera. Ett exempel är Black-Scholes ekvation från finansmatematik som dyker upp i samband med optionsprissättning,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV$$

som kan transformeras till diffusionsekvationen genom ett variabelbyte. V = optionspris, S = aktiepris, t = tid, r = riskfri ränta, σ = volatilitet.

De ekvationer vi studerat ovan kan också studeras i fler rumsdimensioner.

Värmeledningsekv. i $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = k\,\Delta u$$

↑ Laplaceoperatorn

Om vi har en stationär temperaturfördelning är $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ och vi får

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

som kallas Laplaceekvationen. I $\mathbb{R}^3$ har vi värmeledningsekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\Delta u = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Notera att om $u = u(x,y,z,t)$ inte beror på y,z

(eller att detta beroende är försumbart) så får vi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dvs. värmeledningsekv. i en rumsdimension.

Vågekvationen i $\mathbb{R}^3$ ges av

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

och beskriver bl.a. elektromagnetiska vågor (ljus t.ex) i vakuum; c är då ljushastigheten.