Föreläsning 14

SF1633 Differentialekvationer HT16. Kurt Johansson.

Partiella Differentialekvationer (PDE)

En linjär första ordningens PDE med två oberoende variabler x, y och en obekant funktion $u(x,y)$ ges av

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = d(x,y) \qquad (1)$$

där a, b, c, d är givna funktioner. En linjär andra ordningens PDE i två variabler ges av

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \qquad (2)$$

där $A, B, \dots, G$ är givna och kan bero på x, y men inte på u eller dess derivator. Ekvationen (1) är <u>homogen</u> om $d = 0$ och (2) är homogen om $G = 0$. För en homogen, linjär PDE gäller <u>superpositionsprincipen</u>, dvs. linjärkombinationer av lösningar ger nya lösningar. För (2) är detta en konsekvens av att den <u>partiella differential operatorn</u>

$$L = A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2} + D\frac{\partial}{\partial x} + E\frac{\partial}{\partial y} + F$$

är en linjär operator.

Då gäller

$$L(c_1u_1+c_2u_2)=c_1Lu_1+c_2Lu_2$$

om c_1, c_2 är konstanter.

Om $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ är en öppen mängd, så är $u(x,y)$ en lösning till (1) (resp. (2)) i Ω om u satisfierar (1) (resp. (2)) för alla $(x,y) \in \Omega$.

Vi kommer att betrakta fallet då $A, B, \ldots, F$ är konstanta.

<u>Ex.</u> Visa att $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ löser ekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad , \quad (x,y)\in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2(x^2+y^2)-2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2(x^2+y^2)-2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

Vi ser att

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Antag att A, B, C ej alla är $= 0$. Vi gör då klassificeringen

(2) är <u>hyperbolish</u> om $B^2 - 4AC > 0$

(2) är <u>parabolish</u> om $B^2 - 4AC = 0$

(3) är <u>elliptish</u> om $B^2 - 4AC < 0$.

Dessa typer av ekvationer har lösningar med olika egenskaper.

Kommentar: Efter att eventuellt ha multiplicerat med -1 kan vi utan inskränkning anta att $A > 0$. Namnen kommer då av att ekvationen

$$P(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = \text{konst.}$$

ger en ellips om $B^2 - 4AC < 0$, en parabel om $B^2 - 4AC = 0$ och en hyperbel om $B^2 - 4AC > 0$ (bortsett från degenererade fall). Vi har

$$L = P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Vi betraktar tre standardexempel på de tre typerna av ekvationer.

1) $$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ en-dimensionella vågekvationen

$A = a^2,\ B = 0,\ C = -1,\quad B^2 - 4AC = a^2 > 0.$

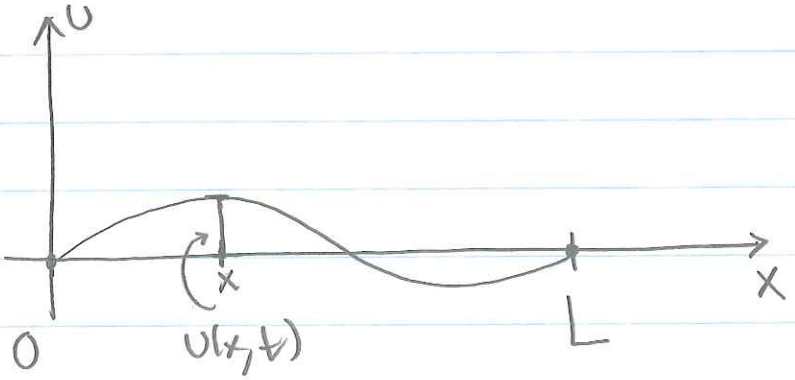
(Variabeln y har bytt namn till t eftersom vi vill tänka på x som en rumsvariabel och t som en tidsvariabel;)

Detta är en hyperbolisk ekvation.

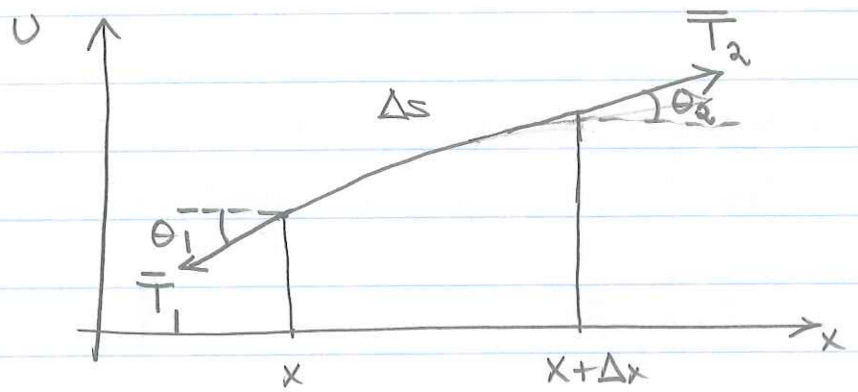
2) $$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t},\quad k > 0,$$ en-dim. värmeledningsekvationen eller diffusionsekvationen, Parabolisk ekvation

3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$ Laplace ekvation
elliptisk ekvation

Skiss av en fysikalisk härledning av vågekvationen för en elastisk sträng (en sträng på en gitarr).



Betrakta en liten del av strängen vid en viss tidpunkt t.



ρ = massa per längdenhet

$m = \rho \Delta s \approx \rho \Delta x$

$\overline{T}_1, \overline{T}_2$ spänningskrafter , $|\overline{T}_1| = |\overline{T}_2| = T$

Vertikal kraft på strängbiten $= |\overline{T}_2| \sin\theta_2 - |\overline{T}_1| \sin\theta_1$

Antag små utslag så att θ_1 och θ_2 är små. Då är

$$\tan\theta_1 = \frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} \approx \sin\theta_1 .$$

nära 1, $\cos\theta_1 \approx 1 - \theta_1^2/2 \approx 1$ om θ_1 liten.

$\tan\theta_1$ är kurvans lutning i x $= \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$

$\tan\theta_2$ är kurvans lutning i $x+\Delta x = \frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, t)$

Newtons andra lag ger

$$\underbrace{m}_{=\rho\Delta x} \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{\text{vertikal acceleration}} \approx T\tan\theta_2 - T\tan\theta_1 = T\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)$$

eller

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \underbrace{\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)}_{\text{differenskvot för } \frac{\partial u}{\partial x}} \frac{T}{\rho}$$

Låter vi $\Delta x \to 0$ får vi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

där $a^2 = T/\rho$. (ρ har enhet kg/m, T har enhet kgm/s^2, så ρ/T har enhet m^2/s^2, dvs. a har enheten m/s.)

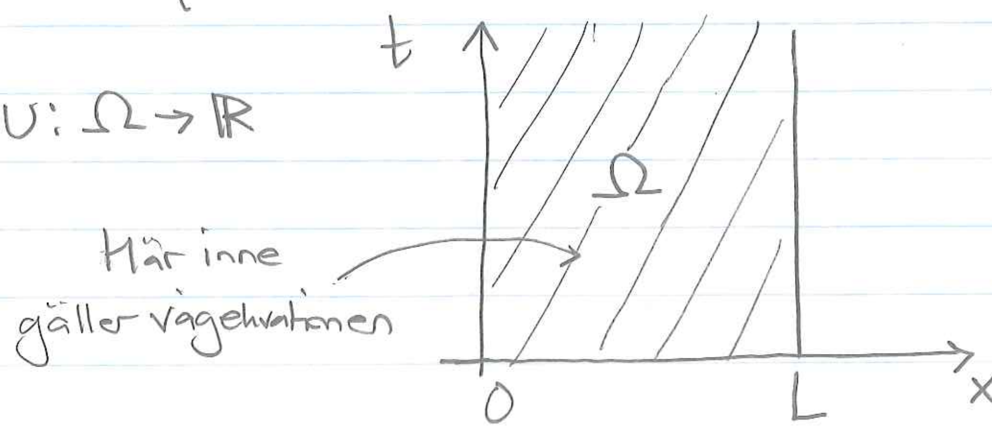
Ett randvärdesproblem för vågekvationen

Betrakta en svängande sträng som ovan.

Ett naturligt problem är då följande:

$$(2)\quad \begin{cases} a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} & \text{vågekvationen}, \ 0<x<L,\ t>0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, \ t>0 & \text{strängen sitter fast i ändarna} \\ u(x,0) = f(x), \ 0<x<L, & \text{strängens läge vid tiden } 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \ 0<x<L, & \text{strängens hastighet vid tiden } 0 \end{cases}$$

$u: \Omega \to \mathbb{R}$

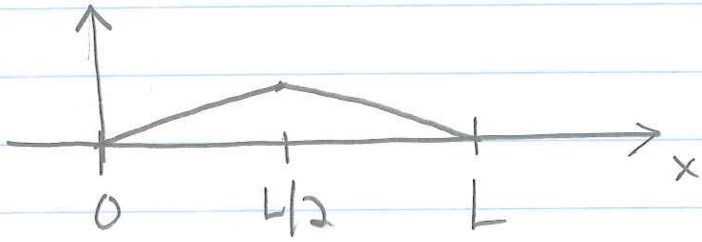


$\Omega = (0,L)\times(0,\infty) = \{(x,t);\ 0<x<L,\ t>0\}$

Vi specificerar vissa värden på randen $\partial\Omega$

Ex.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x, & 0 < x \leq L/2 \\ \alpha(L-x), & L/2 < x < L \end{cases}$$



Höjd vid $L/2 = \frac{\alpha L}{2}$

α liten

$g(x) = 0$, vi startar från vila.

Den metod vi ska använda för att lösa detta problem är separation av variabler en metod som fungerar i vissa problem.

1) Vi söker lösningar på formen

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad \text{(produktlösning)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t)$$

Insättning i vågekvationen ger

$$a^2 X''(x)T(t) = X(x)T''(t).$$

Alltså

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{beror bara} \\ \text{på } x}}{\frac{X''(x)}{X(x)}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{beror bara} \\ \text{på } t}}{\frac{T''(t)}{a^2 T(t)}}$$

Detta uttryck måste vara en konstant om det ska gälla för alla $(x,t) \in \Omega$.

Tag $t = t_0 > 0$. Då är

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t_0)}{a^2 T(t_0)} \quad \text{för alla } x,\ 0<x<L.$$

Kalla konstanten i högra ledet för $-\lambda$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad \text{för alla } 0<x<L. \qquad (3)$$

Alltså $\dfrac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$ för alla $t>0$.

X och T skall alltså vara lösningar till de ordinära differentialekvationerna

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 & (4) \\ T'' + a^2 \lambda T = 0 & (5) \end{cases}$$

Alla lösningar till dessa ekvationer ger produktlösningar. (*)

Randvillkoret $u(0,t) = u(L,t) = 0$, $t>0$ ger

$$X(0)T(t) = X(L)T(t) = 0, \quad t>0, \text{ dvs.}$$

$$X(0) = X(L) = 0.$$

Vi får alltså randvärdesproblemet

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

(*) Linjärkombinationer av sådana lösningar för olika λ ger nya lösningar.

Om $\lambda = 0$ får vi $X(x) = c_1 x + c_2$ och randvillkoren $X(0) = X(L) = 0$ ger $c_1 = c_2 = 0$. Inte intressant.

Om $\lambda = -\alpha^2 < 0$ får vi $X(x) = c_1 e^{-\alpha x} + c_2 e^{\alpha x}$ och $X(0) = X(L)$ ger $c_1 = c_2 = 0$. Inte intressant.

Om $\lambda = \alpha^2 > 0$ får vi

$$X(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x$$

$$X(0) = c_1 = 0 \;, \quad X(L) = c_2 \sin \alpha L = 0$$

Om $c_2 \neq 0$ så att vi får en icke-trivial lösning måste vi ha

$$\sin \alpha L = 0 \Rightarrow \alpha L = \frac{n\pi}{L} \;, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Alltså $\lambda = \alpha^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2} = \lambda_n$.

$X(x) = c_2 \sin \frac{n\pi}{L} x \;, \quad n = 1, 2, \ldots$ ger icke-triviala lösningar

(negativa n ändrar bara tecknet, vilket kan bakas in i c_2)

Om vi sätter in $\lambda = \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ i (5) får vi

$$T'' + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} T = 0$$

som har den allmänna lösningen

$$T(t) = c_3 \cos \frac{n\pi a}{L} t + c_4 \sin \frac{n\pi a}{L}$$

Vi får alltså följande lösningar till vågekvationen

$$u(x,t) = \left(c_2 c_3 \cos \frac{n\pi a}{L} t + c_2 c_4 \sin \frac{n\pi a}{L}\right) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Vi kan välja olika konstanter $c_2 c_3 = A_n$, $c_2 c_4 = B_n$ för olika $n = 1, 2, \ldots$ så vi får lösningarna

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{L} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{L} t\right) \sin \frac{n\pi}{L} x. \qquad (7)$$

Dessa lösningar uppfyller vågekvationen och randvillkoren $u_n(0,t) = u_n(L,t) = 0$ men inte nödvändigtvis de andra villkoren:

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x). \qquad (8)$$

Hur ska vi få dessa villkor uppfyllda?

Vi kan försöka använda superpositionsprincipen. Summor av lösningarna (7) ger nya lösningar. Vi vill hitta en lösning på formen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{L} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{L} t\right) \sin \frac{n\pi}{L} x \qquad (9)$$

Då är

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x), \quad 0 < x < L$$

Vi vill alltså utveckla $f(x)$ i en sinusserie i $0<x<L$ ("half-range expansion"). Detta ger A_n.

Vidare är (vi antar att vi får derivera termvis)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n\pi a}{L}A_n \sin\frac{n\pi a}{L}t + \frac{n\pi a}{L}B_n\cos\frac{n\pi a}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

villkoret ger

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{L}B_n \sin\frac{n\pi}{L}x = g(x).$$

Vi vill också expandera $g(x)$ i en cosinusserie i $0<x<L$. Detta ger B_n.

Vi får

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx \qquad (10)$$

$$\frac{n\pi a}{L}B_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx. \qquad (11)$$

<u>Diskussion</u>

(9) med A_n och B_n bestämda av (10) och (11) löser alltså vårt begynnelsevärdesproblem.
Vi har att

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi)$$

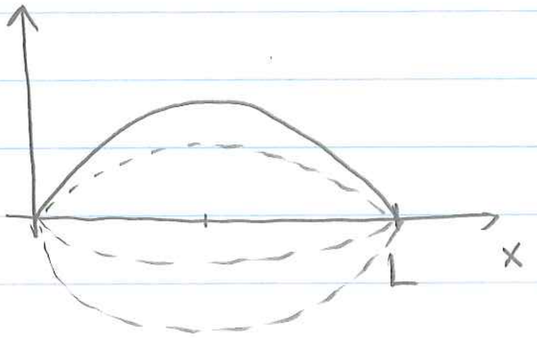
där $\cos\varphi = b/\sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\varphi = a/\sqrt{a^2+b^2}$, vilket följer från additionsformeln för sinus. Alltså kan vi skriva

amplitud

$$u_n(x,t) = C_n \sin\left(\frac{n\pi a}{L}t + \varphi_n\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$ stående våg

där $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, $\cos\varphi_n = \frac{B_n}{C_n}$, $\sin\varphi_n = \frac{A_n}{C_n}$.

$\boxed{n=1}$



$C_1 \sin\frac{\pi}{L}x$

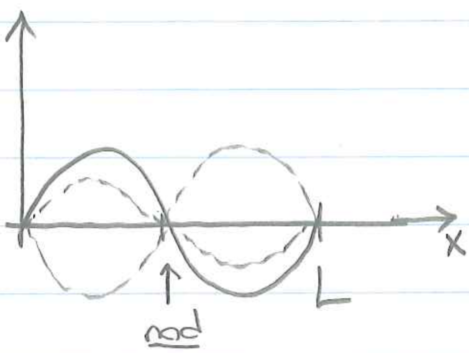
Detta multipliceras med $\sin\left(\frac{n\pi a}{L}t + \varphi_n\right)$ som varierar i tiden.

[$\sin \omega t = \sin 2\pi f t$, ω vinkelfrekvens, f frekvens]

Frekvensen $= f_1 = \frac{a}{2L}$ $\left(= \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}\right)$

Grundton,

$\boxed{n=2}$



$C_2 \sin\frac{2\pi}{L}x$

Första övertonen. Frekvens $f_2 = \frac{a}{L} = 2f_1$.

$n \geq 2$ kallas övertoner. Hela svängningen ges som en linjärkombination av grundtonen och övertoner.

Svängande sträng. Transformperspektiv.

Istället för att använda separation av variabler kan vi tänka på följande sätt.

(i) $a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $0<x<L$, $t>0$

(ii) $u(0,t) = u(L,t) = 0$, $t>0$

(iii) $u(x,0) = f(x)$, $0<x<L$

(iv) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$, $0<x<L$

Vi ansätter en lösning i form av en Fourierserie i x med koefficienter som beror på t. På grund av (ii) väljer vi en sinusserie i x

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \sin\frac{n\pi}{L}x .$$

Då är $u(0,t) = u(L,t) = 0$ för alla $t>0$.
Vi undersöker nu vad ekvationen ger för villkor på $B_n(t)$.

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t)\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 B_n(t) \sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n''(t) \sin\frac{n\pi}{L}x .$$

Ekvationen ger

$$B_n''(t) = -\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 B_n(t).$$

Vi har alltså transformerat ekvationen till en ekvation för Fourierkoefficienterna istället.

Vi får

$$B_n(t) = c_n \cos\frac{an\pi}{L}t + d_n \sin\frac{an\pi}{L}t$$

som den allmänna lösningen till denna ODE. Alltså,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \cos\frac{an\pi}{L}t + d_n \sin\frac{an\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

Detta ger

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi}{L} = f(x)$$, vilket bestämmer c_n,

och

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{an\pi}{L}c_n \sin\frac{an\pi}{L}t + \frac{an\pi}{L}d_n \cos\frac{an\pi}{L}t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x.$$

Vi får

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{an\pi}{L}d_n \sin\frac{n\pi}{L}x = g(x),$$

vilket bestämmer d_n.