Föreläsning 13

SF1633 Differentialekvationer HT16. Kurt Johansson.

Cosinus- och sinusserier

Låt f vara en funktion på $(-p,p)$. Vi säger att

f är udda om $f(-x) = -f(x)$

f är jämn om $f(-x) = f(x)$

$f(x) = x$ är udda, $f(x) = x^2$ är jämn.

1) Om f är udda ser vi att $f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x$ också är udda eftersom cosinus är jämn,

$$f(-x)\cos\frac{n\pi}{p}(-x) = -f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x$$

Alltså är

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx = 0.$$

Fourierserien till f blir alltså en ren sinusserie,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{p}x.$$

Observera att

$$b_n = \frac{1}{p}\underbrace{\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,dx}_{\text{jämn}} = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,dx\ , \quad n\geq 1.$$

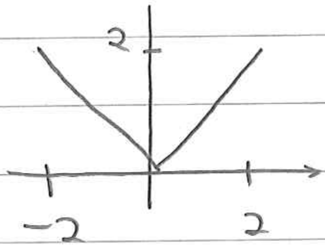
2) På helt analogt sätt får vi att om f är jämn blir $b_n = 0$, $n \geq 1$, så vi får en ren cosinusserie

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{p}x$$

där

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx\ , \quad n \geq 0.$$

Ex. Expandera $f(x) = |x|$, $-2 < x < 2$ i en Fourierserie.



Eftersom f är jämn får vi en ren cosinusserie; $p = 2$.

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x\,dx = \int_0^2 x\cos\frac{n\pi}{2}x\,dx$$

$[n \neq 0]$

$$= \left[x\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}x\,dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int_0^2 \sin\frac{n\pi}{2}x\,dx = -\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}x\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$a_0 = \int_0^2 x\,dx = 2$$

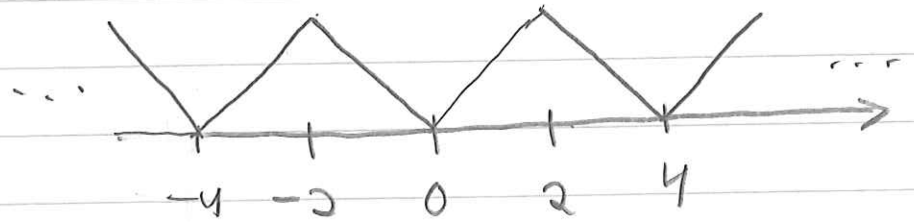
Vi får

$$|x| = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^n-1)}{n^2\pi^2} \cos\frac{n\pi}{2}x \quad , \quad -2 < x < 2$$

(också då $x = \pm 2$)

Detta ger en periodisk utvidgning av $f(x)$:

"sågtandsfunktion"



<u>Ex.</u>

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{om} \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{om} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

Udda

Vi får en sinusserie

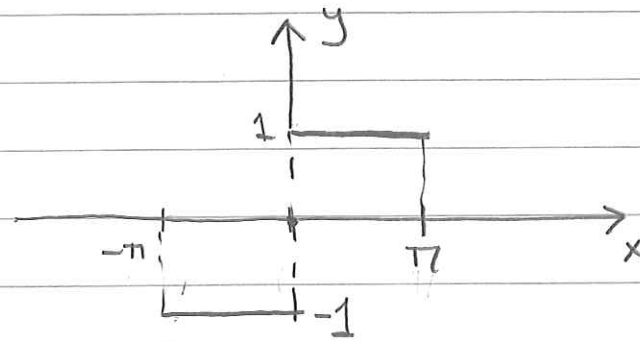
$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} \sin nx \qquad \text{om} \begin{cases} -\pi < x < 0 \\ 0 < x < \pi \end{cases}$$

Vi ser att $f(0) = 0 = \dfrac{f(0+) + f(0-)}{2}$, ty

$f(0+) = 1$ och $f(0-) = -1$.

$f(x)$:



Partialsummor

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} \sin nx = S_N(f)(x)$$

Ju större N desto bättre approximation.

sämre approximation nära diskontinuiteterna, värden >1 nära $x = 0+$ och <-1 nära $x = 0-$.

<u>Gibbs fenomen</u>

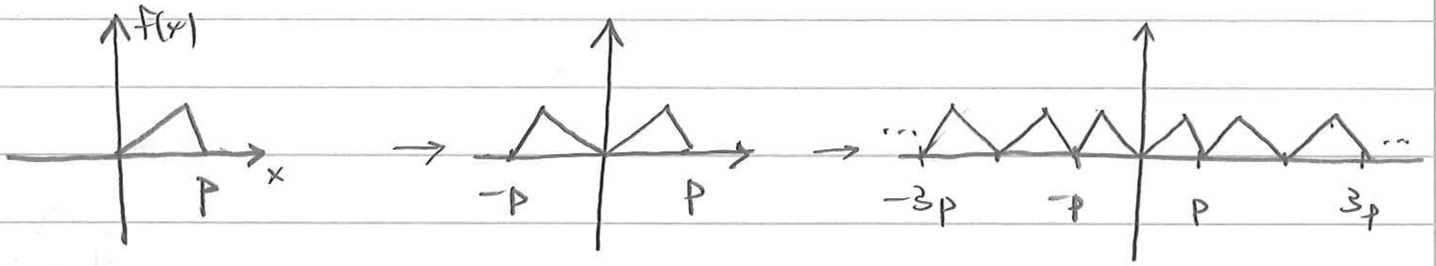
Approximationen "slår över" nära diskontinuiteter oavsett hur stort N är.

"Half-range expansions"

Om vi har en funktion f definierad på intervallet $(0,p)$ och vill utveckla den i en Fourierserie finns det olika möjligheter att göra en periodisk utvidgning.

(i) Utvidga till en jämn funktion på $(-p,p)$ som sedan utvidgas till en periodisk funktion med perioden $2p$.

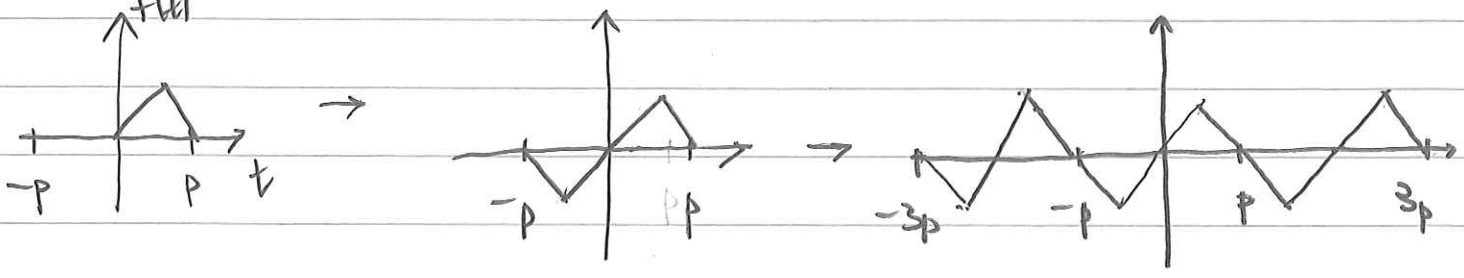
$$f(x) = f(-x), \quad \text{om} \quad -p<x<0$$



Vi får en cosinusserie

(ii) Utvidga till en udda funktion på $(-p,p)$ som sedan utvidgas till en periodisk funktion med perioden $2p$.

$$f(x) = -f(-x) \quad \text{om} \quad -p<x<0$$



Vi får en sinusserie.

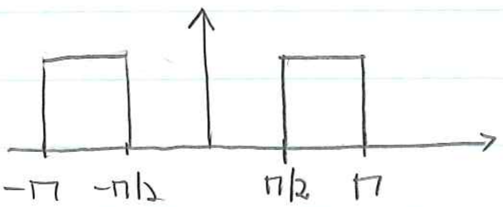
I båda fallen har vi samma funktion på $(0,p)$, det är utvidgningen som skiljer sig åt.

Ex.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0<x<\frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{om } \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$$

Utveckla f i en Fourierserie i $[0,\pi]$ enligt de två fallen ovan.

(i)



$p=\pi$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin n\pi/2}{n} \quad , n\neq 0$$

$n=2k$ jämn, $k\geq 1$, $a_{2k}=0$

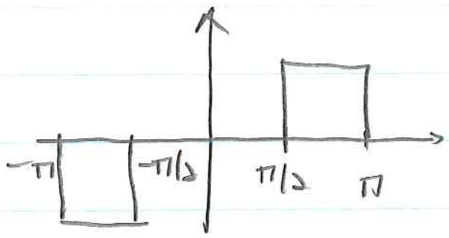
$n=2k-1$ udda, $k\geq 1$

$$a_{2k-1} = -\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin\frac{2k-1}{2}\pi}{2k-1} = -\frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{2(-1)^k}{\pi(2k-1)}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} dx = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(-1)^k}{\pi(2k-1)}\cos(2k-1)x \quad , 0<x<\pi$$

(ii)



$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2}{\pi n}\left(-(-1)^n + \cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

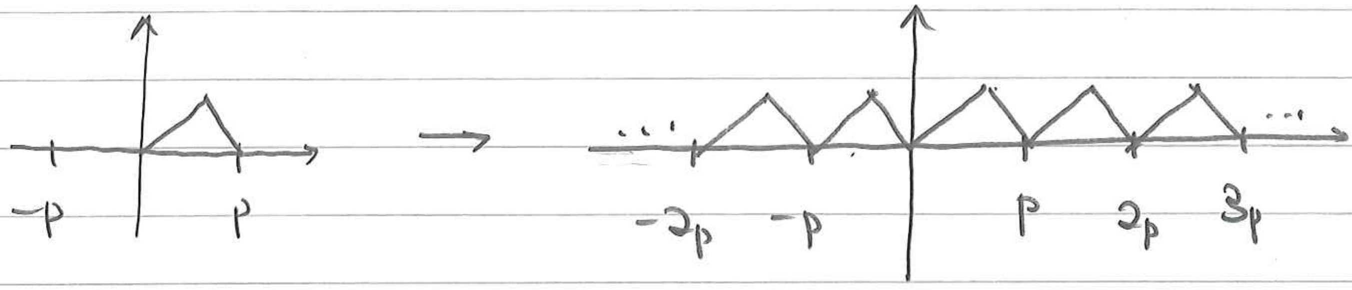
$n = 2k,\ k \geq 1,\quad \cos\frac{n\pi}{2} = \cos \pi k = (-1)^k$

$n = 2k-1,\ k \geq 1,\quad \cos\frac{(2k-1)\pi}{2} = 0,\quad -(-1)^{2k-1} = 1$

$b_{2k-1} = \frac{2}{\pi(2k-1)},\ k \geq 1,\quad b_{2k} = \frac{1}{\pi k}\left((-1)^k - 1\right)$

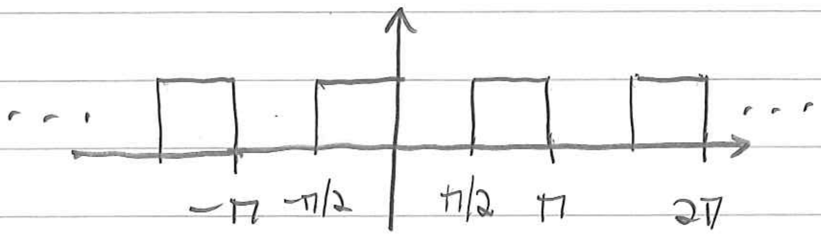
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k - 1}{\pi k}\sin 2kx + \frac{1}{\pi(2k-1)}\sin(2k-1)x\right)$$

(iii) En tredje möjlighet är att välja att utvidga funktionen till en periodisk funktion med perioden p.



Vi får då i allmänhet en Fourierserie som kan innehålla både sinus- och cosinustermer.
Återigen har vi samma funktion på vårt ursprungsintervall $(0,p)$.

I vårt exempel får vi



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0}\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2}\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = 0\ ,\quad n \geq 1$$

$a_n = 0, \quad n \geq 1$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx = 1$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0} \sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi/2}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1 + \cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right)$$

$n = 2h, \ h \geq 1, \quad \cos\frac{n\pi}{2} = \cos \pi h = (-1)^h, \ \cos n\pi = 1$

$$b_{2h} = \frac{1}{2\pi h}\left(2(-1)^h - 2\right) = \frac{1}{\pi h}\left((-1)^h - 1\right)$$

$n = 2h-1, \ h \geq 1, \quad \cos\frac{n\pi}{2} = 0, \ \cos(2h-1)\pi = -1$

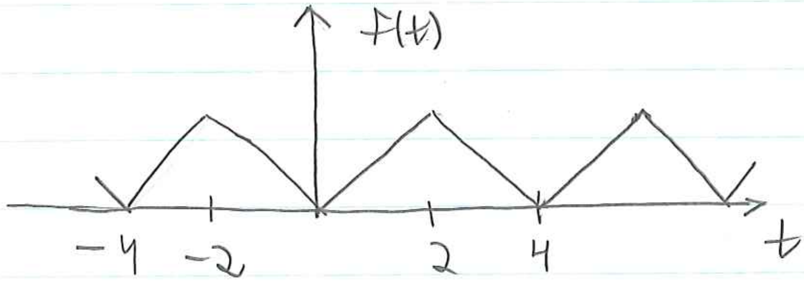
$b_{2h-1} = 0$.

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^h - 1}{\pi h} \sin 2hx$$

Ex. Hitta en partikulärlösning till

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = f(t)$$

där $m=k=1$ och $f(t)$ är en periodisk kraft:



$f(t) = |t|$, $-2<t<2$

Tag $m=k=1$.
Vi söker en periodisk lösning (jämn):

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{2}t$$

Derivering två gånger ger (vi antar att vi får derivera termvis)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \cos\frac{n\pi}{2}t \qquad \left[\frac{d^2}{dt^2}\cos at = -a^2\cos at\right]$$

Vänstra ledet i ekvationen blir $(m=k=1)$

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(1-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2\right)\cos\frac{n\pi}{2}t = \frac{d^2x}{dt^2} + x$$

Från ett tidigare exempel vet vi att

$$f(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}t$$

Vi ser att vi vill ha

$$\frac{A_0}{2} = 1 \;, \quad A_n\left(1-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2\right) = \frac{4((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}$$

$\Leftrightarrow$

$$A_0 = 2 \;, \quad A_n = \frac{4((-1)^n-1)}{n^2\pi^2\left(1-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2\right)} \;, n \geq 1 .$$

(Vi ser att

$$1-\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 \neq 0 \text{ för alla } n \geq 1 .$$

En partikulärlösning ges alltså av

$$x(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4((-1)^n-1)}{n^2\pi^2(1-n^2\pi^2/4)} \cos\frac{n\pi}{2}t \qquad (1)$$

(Vi måste egentligen visa att det är tillåtet att derivera termvis två gånger för att se att detta verkligen är en lösning.)

Transformperspektiv

$$f \text{ per. med per. } 2p \rightleftarrows \{a_n\}_{n\geq 0},\ \{b_n\}_{n\geq 1}$$

$$\text{Periodisk funktion} \longrightarrow \boxed{\;T\;} \longrightarrow \text{Fourierkoefficienter}$$

Fourierkoefficienterna kan ses som en transform av funktionen. Ovan hittade vi en lösning till differentialekvationen genom att lösa den på transformsidan, dvs. beräkna dess Fourierkoefficienter. Vi transformerar sedan tillbaka till funktionssidan i (1), vi "inverstransformerar".