Föreläsning 11

SF1633 Differentialekvationer HT16. Kurt Johansson

Stabilitet för linjära system med konstanta koefficienter

Betrakta systemet

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{= A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Antag att $\Delta = \det A = ad - bc \neq 0$. Då är $(0,0)$ enda kritiska punkten till (1). Vi vill avgöra vilken typ av kritisk punkt $(0,0)$ är.

Sätt $\tau = \operatorname{tr} A = a + d$ (spåret av matrisen A).

Karakteristiska ekvationen för A är

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$$

Lösningar:

$$\lambda = \frac{\tau}{2} \pm \sqrt{\frac{\tau^2}{4} - \Delta} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}.$$

Vi delar upp i olika fall

1) Två olika reella egenvärden
(Diskriminanten $\tau^2 - 4\Delta > 0$)

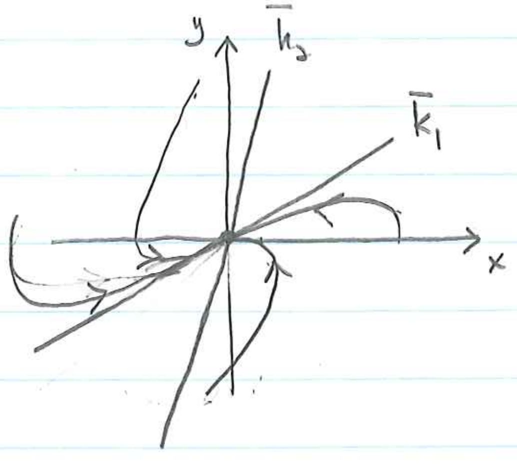
λ_1 egenvärde med egenvektor $\bar{k}_1$

λ_2 egenvärde med egenvektor $\bar{k}_2$

<u>Lösning</u>:

$$\bar{x}(t) = c_1 \bar{k}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \bar{k}_2 e^{\lambda_2 t}$$

a) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ båda negativa

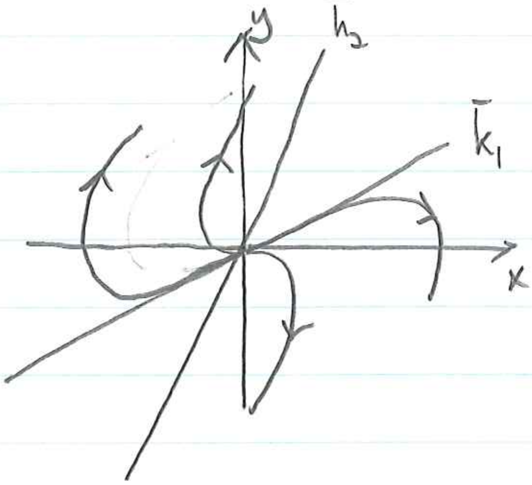


$\bar{k}_2$-komponenten går fortare mot noll än $\bar{k}_1$-komponenten

<u>stabil nod</u>

(0,0) attraktiv jämviktspunkt

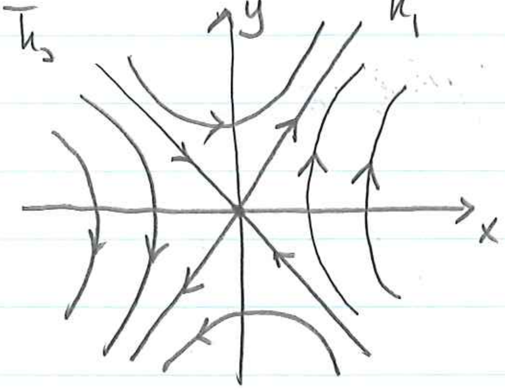
b) $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ båda positiva



instabil nod

(0,0) repellerande jämviktspunkt

c) $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$



Sadelpunkt

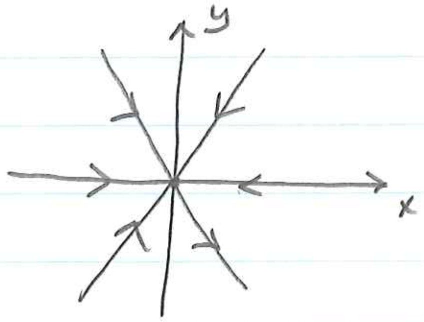
instabil jämviktspunkt

2) Dubbelt egenvärde $\lambda_1 = \lambda_2$. Diskriminanten $= 0$.

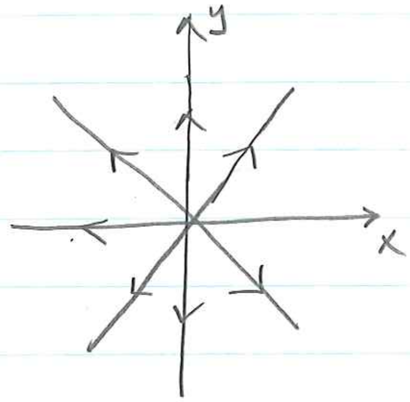
a) Två linjärt oberoende egenvärden (egenrummet dim $= 2$)

$$\bar{X}(t) = (c_1 \bar{k}_1 + c_2 \bar{k}_2) e^{\lambda_1 t}$$

$\lambda_1 < 0$: degenererad stabil nod



$\lambda_1 > 0$: degenererad instabil nod

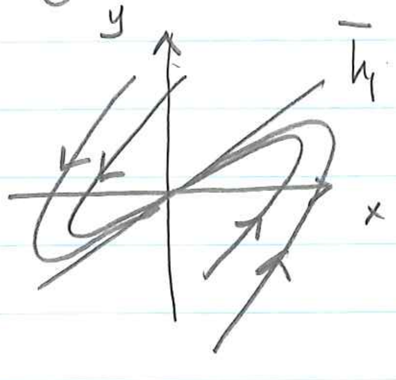


($\lambda_1 = 0$, HL i (1) är 0, bara konstanta lösningar.)

b) Bara en linjärt oberoende egenvektor (egenrummet har dim = 1)

$$\bar{x}(t) = c_1 \bar{k}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 (\bar{k}_1 t + \bar{p}) e^{\lambda_1 t}$$

$\lambda_1 < 0$: degenererad stabil nod



$\lambda_2 > 0$: degenererad instabil nod, vänd på pilarna.

3) Icke-reella egenvärden. Diskriminanten < 0.

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \beta \neq 0$$

Lösningarna har formen

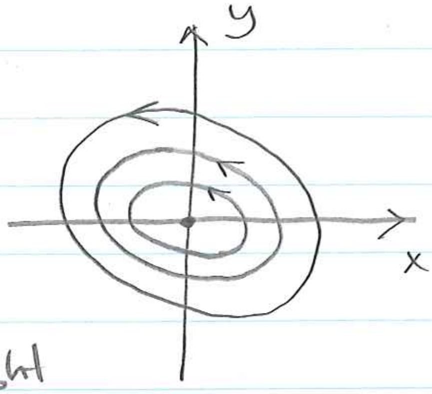
$$x(t) = e^{\alpha t}\underbrace{\left(c_{11}\cos\beta t + c_{12}\sin\beta t\right)}_{\text{periodisk med period } \frac{2\pi}{\beta}}$$

$$y(t) = e^{\alpha t}\left(c_{21}\cos\beta t + c_{22}\sin\beta t\right)$$

a) $\alpha = 0$, rent imaginära rötter

Periodiska banor

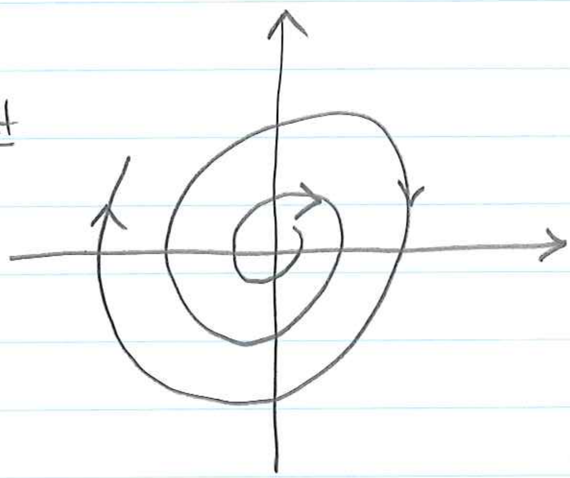
ellipser



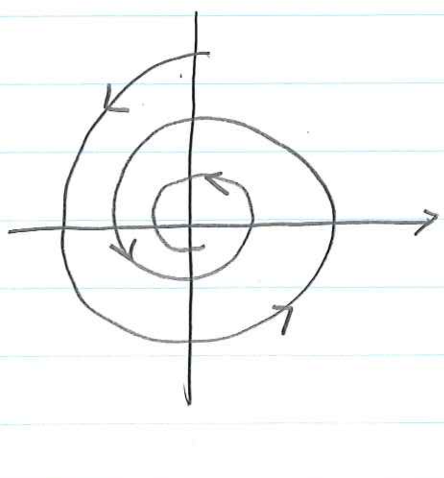
$(0,0)$ ett <u>centrum</u>

stabil men ej asymptotiskt stabil jämviktspunkt

b) $\alpha > 0$ <u>instabil spiralpunkt</u>



c) $\alpha < 0$ <u>stabil spiralpunkt</u>



Ex. $\begin{cases} x' = -5x + 3y \\ y' = 2x - 7y \end{cases}$, $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$

Vilken typ av kritisk punkt är $(0,0)$?

Egenvärden: $\begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ 2 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (-5-\lambda)(-7-\lambda) - 6$

$= \lambda^2 + 12\lambda + 29 = 0 \Rightarrow \lambda = -6 \pm \sqrt{7}$

Två olika reella egenvärden båda < 0 : stabil nod

Ex. $\begin{cases} x' = -5x + 3y \\ y' = -7x + 4y \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$

Vilken typ av kritisk punkt är $(0,0)$?

Egenvärden: $\begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 \\ -7 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \alpha \pm i\beta$

$\alpha < 0$. Stabil spiralpunkt.

Linjarisering, Lokal analys av stabilitet

Betrakta ett icke-linjärt system av första ordningen

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases} \qquad (2)$$

(x_0,y_0) kritisk punkt, $P(x_0,y_0) = Q(x_0,y_0) = 0$. Om (x,y) är nära (x_0,y_0) gäller approximativt (antag P, Q C^1)

$$P(x,y) \approx \underbrace{P(x_0,y_0)}_{=0} + \frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$Q(x,y) \approx \underbrace{Q(x_0,y_0)}_{=0} + \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Vi kan approximera (2) för (x,y) nära (x_0,y_0) med

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(x-x_0) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\[2ex] \dfrac{d}{dt}(y-y_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \end{cases} \qquad (3)$$

Det <u>linjariserade systemet</u> kring (x_0,y_0) har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0) \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

A har egenvärden λ_1, λ_2

Sats a) Om $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ eller $\mathrm{Re}\,\lambda_1 < 0, \mathrm{Re}\,\lambda_2 < 0$ så är (x_0, y_0) en asymptotiskt stabil kritisk punkt

b) Om något egenvärde är >0 eller har positiv realdel är (x_0, y_0) en instabil kritisk punkt.

Ex. Klassificera (om möjligt) de kritiska punkterna till

$$\begin{cases} x' = xy - 3y - 4 & = P(x,y) \\ y' = y^2 - x^2 & = Q(x,y) \end{cases}$$

Bestäm kritiska punkter $y^2 - x^2 = 0$ ger $y = \pm x$.

$y = x$ i första ekv. ger $x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ eller $x = 4$

$(-1,-1)$, $(4,4)$ kritiska punkter

$y = -x$ i första ekv. ger $-x^2 + 3x - 4 = 0$ som saknar reella rötter.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = y \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = x - 3$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x \quad \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y$$

- $(-1,-1)$ ger matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{23}, \quad \text{Re}\,\lambda = -\frac{1}{2} < 0$$

stabil spiralpunkt

- $(4,4)$ ger matrisen

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -8 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = 6 \pm \sqrt{36-40} = 6 \pm 2i, \quad \text{Re}\,\lambda = 6 > 0$$

instabil spiralpunkt

Ex. Ekvationen

$$x'' + x - x^3 = 0$$ (icke-linjär svängning)

kan skrivas

$$\begin{cases} x' = y = P(x,y) \\ y' = -x + x^3 = Q(x,y) \end{cases}$$ (x,y) fasplanet

a) Klassificera kritiska punkter.

$-x+x^3=0 \Leftrightarrow x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=0,\ x=\pm 1$

$(0,0)$, $(-1,0)$ och $(1,0)$ kritiska punkter

$\frac{\partial P}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial P}{\partial y}=1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2-1, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}=0$

$(0,0): \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+1=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm i$

Eftersom realdelen $=0$ kan vi inte avgöra typen av kritisk punkt genom linjärisering. Skulle kunna vara ett centrum.

$(\pm 1,0): \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-2=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm\sqrt{2}$

$(1,0)$ och $(-1,0)$ är sadelpunkter.

b) Studera lösningarna nära $(0,0)$. Centrum?

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x+x^3 \end{cases}$$

$t \to (x(t), y(t))$ lösningskurva.

Antag att lösningskurvan ges av en funktion $y=y(x)$.
Då är

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{x^3 - x}{y}$$ ("Fasplansmetoden")

↑

riktningskoefficient

Separabel ekvation.

$$\int y\,dy = \int x^3 - x\,dx + c_1$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + c_1$$

Vi ser att lösningskurvan bör vara en del av nivåytan

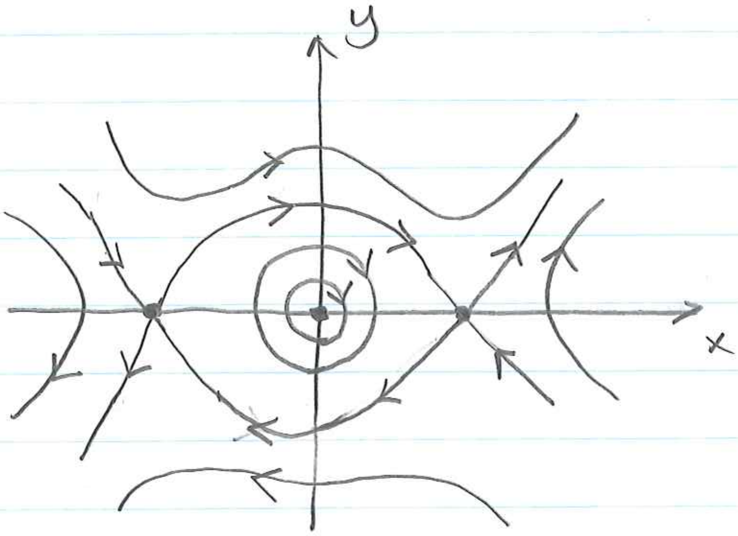
$$E(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} = c_1$$ (energin konstant)

$$E(x,y) = E(\underbrace{x_0, 0}_{\text{startpunkt}})$$ sluten kurva om x_0 liten (se nedan eller ex. 9, s. 407 i boken.)

Att $E(x,y)$ är konstant på lösningskurvan kan vi se genom följande räkning

$$\frac{d}{dt} E(x(t), y(t)) = \frac{\partial E}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial E}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= (-x^3 + x)y + y(x^3 - x) = 0.$$



Fasporträtt

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + c_1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2}(x^4 - 2x^2) + 2c_1$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{2}(x^2-1)^2 + 2c_1 - \frac{1}{2} \qquad , c_2 = 2c_1 - \frac{1}{2}$$

Om vi startar i $(x_0, 0)$, x_0 litet, får vi

$$0 = \frac{1}{2}(x_0^2-1)^2 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = -\frac{1}{2}(x_0^2-1)^2$$

$$y^2 = \frac{1}{2}(x^2-1)^2 - \frac{1}{2}(x_0^2-1)^2 \underset{\uparrow}{=} \frac{(x^2-1-(x_0^2-1))(x^2-1+x_0^2-1)}{2}$$

konjugatregeln

$$y^2 = \frac{(x^2-x_0^2)(x^2+x_0^2-2)}{2} \qquad (*)$$

Om $x_0 > 0$ är nära 0 och $0 < x < x_0$ är högra ledet i $(*)$ > 0 och vi får två y-värden.
Analogt om $-x_0 < x < 0$ (symmetri).
Kurvan ser ut som på bilden.