Föreläsning 10

SF1633 Differentialekvationer HT 16, Kurt Johansson

Ett första ordningens <u>autonomt</u> system med två obekanta har formen

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases}.$$

Högerledet beror ej explicit på t.

<u>Ex.</u>

En pendel satisfierar ekvationen

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0,$$

vilket följer från Newtons andra lag. Sätt

$x = \theta$, $y = \dfrac{d\theta}{dt}$. Vi får

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{g}{\ell}\sin x \end{cases}$$

Ex. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + \sin t \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$

är icke-autonomt.

Mer allmänt:

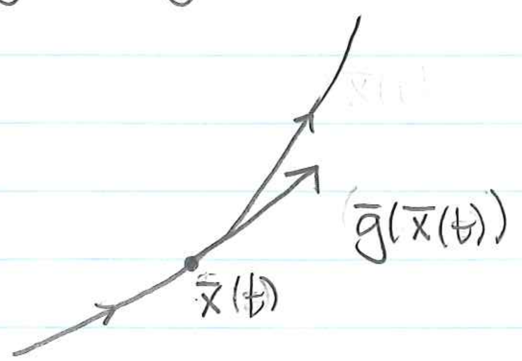
$\bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ("läge vid tiden t")

$\bar{g}(\bar{x}) = (g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, \dots, x_n))$

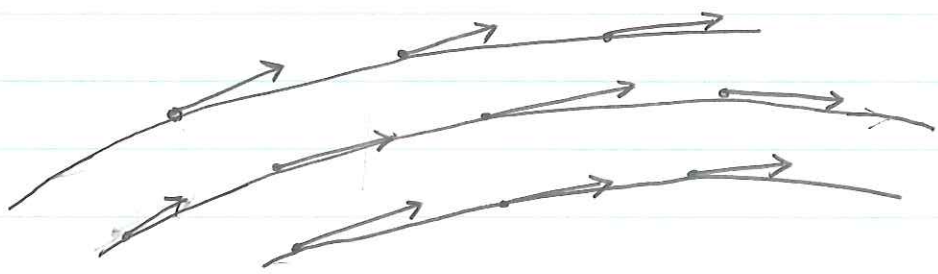
$\bar{x}'(t) = \bar{g}(\bar{x}(t))$

$t \to \bar{x}(t)$ kurva i $\mathbb{R}^n$, $\bar{g}(\bar{x}(t))$ ger tangentvektorn, hastighetsvektorn, i punkten $\bar{x}(t)$.

$\bar{x} \to \bar{g}(\bar{x})$ ger ett <u>vektorfält</u>



$t \to \bar{x}(t)$ ger en <u>bana</u>, trajektoria, en parametriserad kurva i $\mathbb{R}^n$.



Man kallar ofta $\bar{x}'(t) = \bar{g}(\bar{x})$ för ett dynamiskt system

$\bar{x}(t)$ är tillståndet (state) vid tiden t.

Betrakta
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases}$$

En konstant lösning $x(t) = x_0,\ y(t) = y_0$ för alla t

är en kritisk punkt, jämviktspunkt, stationär punkt

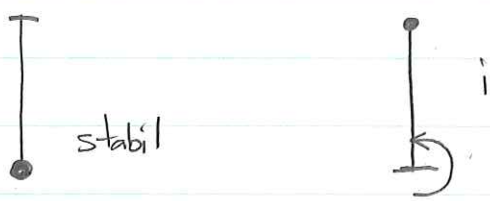
(x_0, y_0) måste lösa
$$\begin{cases} P(x,y) = 0 \\ Q(x,y) = 0 \end{cases}$$

Vektorfältet blir noll i denna punkt.

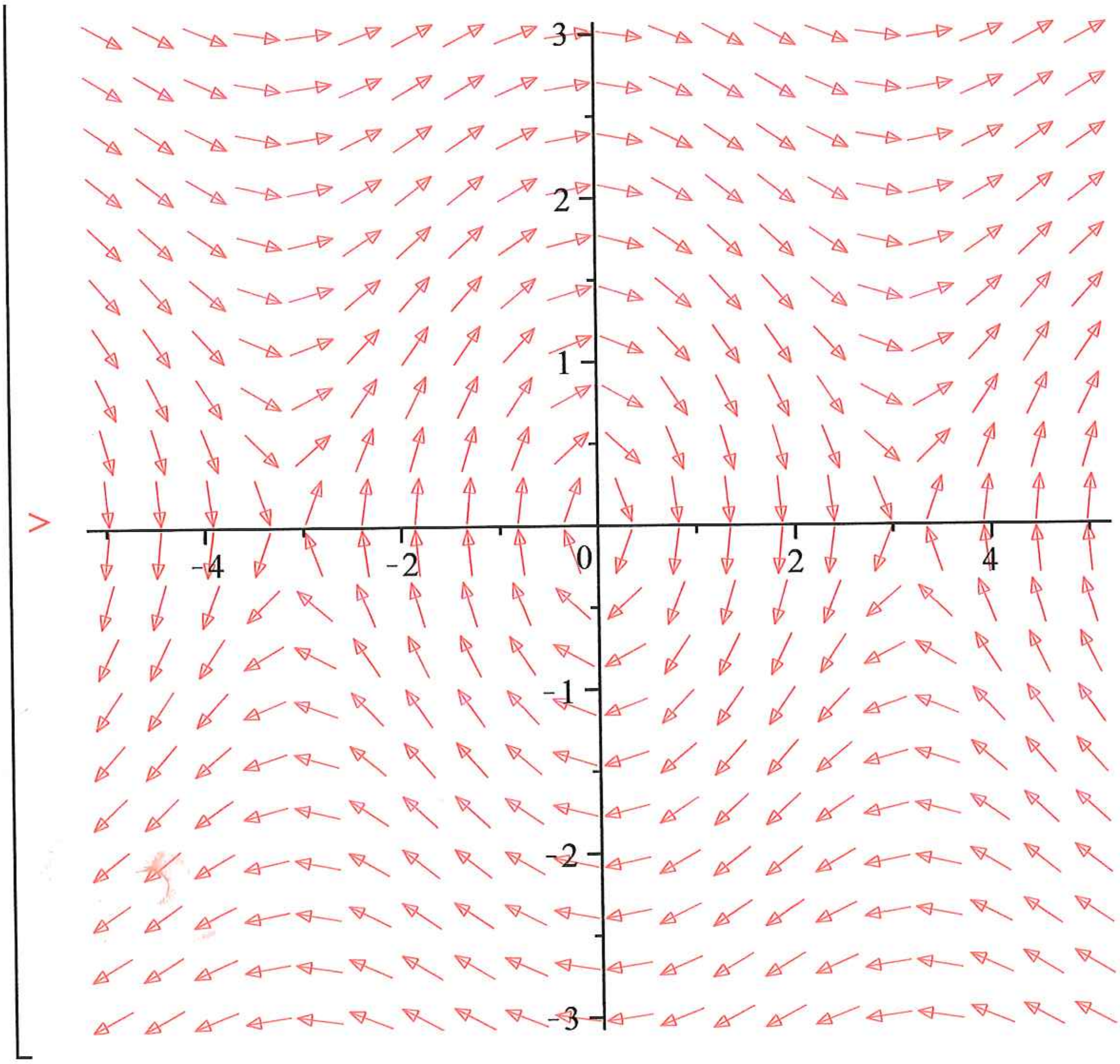
Ex. Pendeln

$$P(x,y) = y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

$$Q(x,y) = -\frac{g}{\ell}\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$



$(0,0)$ $(0,\pi)$ pendeln står rakt upp



Fasporträtt för pendeln

Ex. Bestäm alla kritiska punkter till

$$\begin{cases} x' = y^2 - x \\ y' = x^2 - y. \end{cases}$$

Vi får $\begin{cases} y^2 - x = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$

$x = y^2 \Rightarrow x^2 = y^4$. Alltså $y^4 - y = 0 \Leftrightarrow y(y^3 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow$ $y = 0$ eller $y = 1$ (reella lösningar)

$y = 0$ ger $x = 0$, $y = 1$ ger $x = 1$

Svar: Kritiska punkter: $(0,0)$, $(1,1)$.

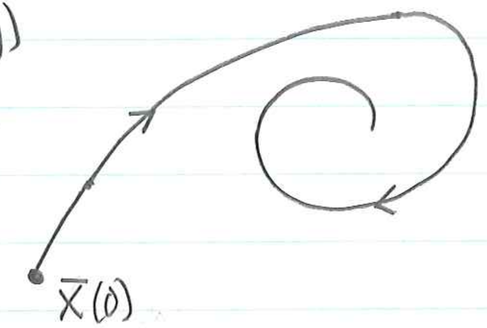
Om P och Q är C^1 i en öppen mängd D i $\mathbb{R}^2$ och $(x_0, y_0) \in D$ så har begynnelsevärdesproblemet

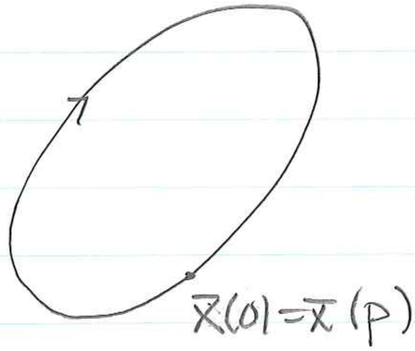
$$\begin{cases} x' = P(x,y) \\ y' = Q(x,y) \end{cases}, \quad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$$

en entydig lösning nära (x_0, y_0).

Lösningskurvor kan inte skära sig själva, eller andra lösningskurvor.

$\bar{X} = (x, y)$





periodisk lösning

Ex. Lös begynnelsevärdesproblemet

(0,0) enda kritiska punkt.

$$\begin{cases} x' = -y - x(x^2+y^2)^2 \\ y' = x - y(x^2+y^2)^2 \end{cases}, \quad \bar{X}(0) = (4,0)$$

genom att övergå till polära koordinater. Beskriv lösningskurvan.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$; $r^2 = x^2+y^2$, $\theta = \arctan\frac{y}{x}$

Kedjeregeln ger: $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(-y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}\right)$$

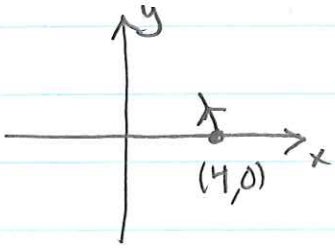
Alltså

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\left(x(-y - x(x^2+y^2)^2) + y(x - y(x^2+y^2)^2)\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left(-xy - x^2r^4 + yx - y^2r^4\right) = -\frac{1}{r}(x^2+y^2)r^4 = -r^5$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(-y(-y - xr^4) + x(x - yr^4)\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(x^2 + y^2\right) = 1$$



Vi får i polära koordinater

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -r^5 \\ \dfrac{d\theta}{dt} = 1 \end{cases} \qquad r(0) = 4, \quad \theta(0) = 0$$

$$\frac{dr}{dt} = -r^5 \Rightarrow -\frac{1}{r^5}\,dr = dt \Leftrightarrow \frac{1}{4r^4} = t + c_1$$

$$\Leftrightarrow r^4 = \frac{1}{4(t+c_1)} \Leftrightarrow r = \frac{1}{(t+c_1)^{1/4}\sqrt{2}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 \Leftrightarrow \theta = t + c_2$$

$$(r, \theta) = \left(\frac{1}{(t+c_1)^{1/4}\sqrt{2}},\ t + c_2\right)$$

$$(r(0), \theta(0)) = \left(\frac{1}{c_1^{1/4}\sqrt{2}},\ c_2\right) = (4, 0) \quad ; \ c_2 = 0$$

$$4 = \frac{1}{c_1^{1/4}\sqrt{2}} \Leftrightarrow c_1^{1/4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{4^5} = \frac{1}{1024}$$

$$r = \frac{1}{(t+c_1)^{1/4}\sqrt{2}} = \frac{1}{(\frac{1}{c_1}t + 1)^{1/4} c_1^{1/4}\sqrt{2}} = \frac{4}{(1024t+1)^{1/4}}$$

<u>Lösning:</u> $r = \dfrac{4}{(1024t+1)^{1/4}}$, $\theta = t$. Spiral mot origo.

Låt $\bar{a} = (a_1, a_2)$ vara en kritisk punkt till ett plant autonomt system

$$\begin{cases} x' = P(x,y) \\ y' = Q(x,y) \end{cases}, \qquad (1)$$

dvs. $P(a_1,a_2) = Q(a_1,a_2) = 0$. Låt $\bar{x}(t) = (x(t), y(t))$ vara en lösning till (1) med begynnelsevillkoret $\bar{x}(0) = \bar{b} \neq \bar{a}$.

- $\bar{a}$ är en <u>stabil kritisk punkt</u> om för varje $\rho > 0$ det finns ett $r > 0$ så att om $|\bar{b} - \bar{a}| < r$ så gäller $|\bar{x}(t) - \bar{a}| < \rho$ för alla $t \geq 0$.

Om vi startar i den inre cirkeln håller vi oss alltid inom den yttre cirkeln.

$\bar{a}$ är en <u>asymptotiskt stabil kritisk punkt</u> om det dessutom gäller att

$$\lim_{t \to \infty} \bar{x}(t) = \bar{a}$$

- Om det existerar ett $\rho > 0$ så att oavsett hur litet vi väljer r alltid finns ett $\bar{b}$ så att $|\bar{b} - \bar{a}| < r$ och ett $t > 0$ så att $|\bar{x}(t) - \bar{a}| \geq \rho$ så är $\bar{a}$ en <u>instabil kritisk punkt</u>.

Ex. I föregående exempel

$$\begin{cases} x' = -y - x(x^2+y^2)^2 = P(x,y) \\ y' = x - y(x^2+y^2)^2 = Q(x,y) \end{cases}$$

är (0,0) en kritisk punkt. Från lösningen

$$\bar{r}(t) = \frac{1}{(t+c_1)^{1/4}\sqrt{2}}$$

ser vi att villkoret $\bar{r}(0) = r_0$ (startradie) ger

$$\frac{1}{c_1^{1/4}\sqrt{2}} = r_0,$$

varför $c_1 = \frac{1}{4r_0^4}$, dvs.

$$\bar{r}(t) = \frac{1}{\left(t+\frac{1}{4r_0^4}\right)^{1/4}\sqrt{2}} \to 0 \text{ då } t \to \infty.$$

Var vi än startar utanför origo konvergerar vi mot origo, varför origo är en asymptotiskt stabil kritisk punkt.

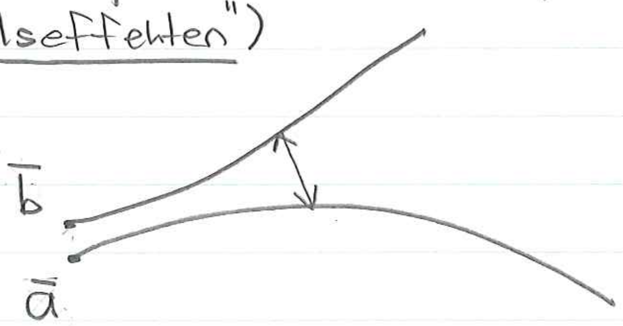
Lorenz ekvation

Mycket förenklad ekvation relaterad till konvektions-strömmar i meterologi.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma x - \sigma y \\ \dfrac{dy}{dt} = \rho x - y - xz \\ \dfrac{dz}{dt} = -\beta z + xy \end{cases}$$

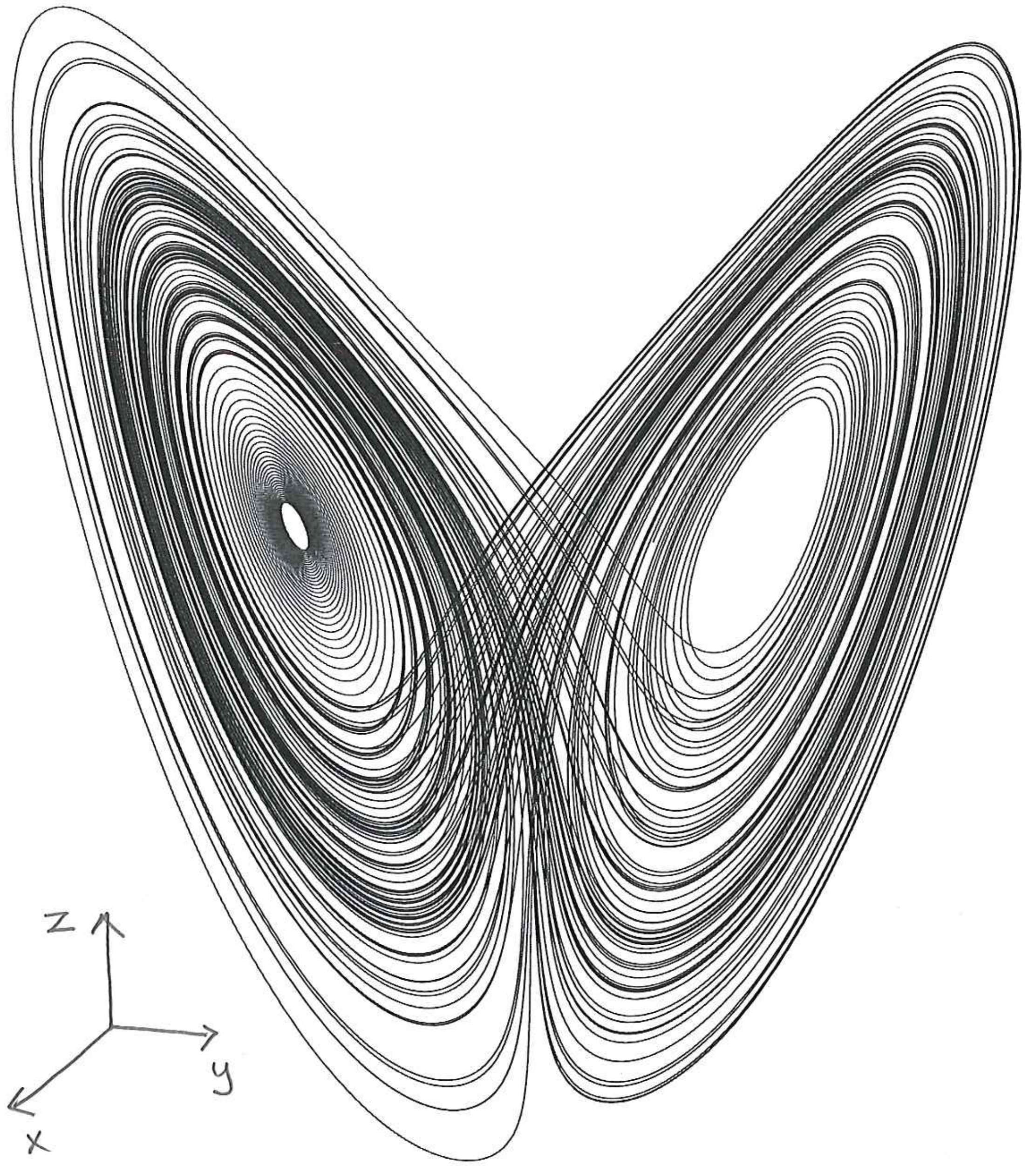
$\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, $\rho = 28$

Dynamiken är mycket komplicerad. Vi får en komplicerad attraktor ("strange attractor") med en kaotisk dynamik.
Kaotisk dynamik innebär att vi har ett mycket känsligt beroende av begynnelsedata, närliggande punkter separerar snabbt (exponentiellt) ("fjärilseffekten")



(Titta på "Lorenz system" i engelska Wikipedia)

$\bar{x} \doteq (x, y, z)$,
$\bar{x}(0) = \bar{a}$, $\bar{x}(0) = \bar{b}$


z
y
x