SF1624 - sammanfattning

- Projektioner och koordinater
  - Givet vektor $\overline{v}$ och linje L, skriv $\overline{v} = \overline{v}_{\|} + \overline{v}_{\perp}$ (komposantuppdelning) där $\overline{v}_{\|}$ är parallell med L och $\overline{v}_{\perp}$ är vinkelrät mot L.
  - $\overline{v}_{\|}$ kallas den *ortogonala projektionen av $\overline{v}$ på L.*
  - Om $W \subset V$ är ett underrum med ON-basen $\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_n$ ges $P_W : V \to W$ av $P_W(\overline{v}) = (\overline{w}_1 \circ \overline{v}) \cdot \overline{w}_1 + (\overline{w}_2 \circ \overline{v}) \cdot \overline{w}_2 + \ldots + (\overline{w}_n \circ \overline{v}) \cdot \overline{w}_n$.
- Skalärprodukt
  - Om $\overline{u}$ är vektor, $\overline{e}$ en enhetsvektor som är parallell med linjen L, så är $\overline{u}_{\|} = (\overline{u} \cdot \overline{e})\overline{e}$, och $|\overline{u}_{\|}| = \overline{u} \cdot \overline{e}$.
  - Längd av vektor: $|\overline{v}|^2 = \overline{v} \cdot \overline{v}$.
  - $\overline{u} \cdot \overline{v} = |u||\overline{v}| \cos(\alpha)$ där α är vinkeln mellan $\overline{u}, \overline{v}$.
  - $\overline{u} \cdot \overline{v} = 0 \Leftrightarrow \overline{u}$ och $\overline{v}$ vinkelräta *eller* någon av $\overline{u}, \overline{v}$ lika med nollvektorn.
  - Säger att $\overline{u}, \overline{v}$ *ortogonala* om $\overline{u} \cdot \overline{v} = 0$.
  - Vektorna $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ sägs vara *ortonormala* om $\overline{v}_i \cdot \overline{v}_j = 0$ om $i \neq j$, och $\overline{v}_i \cdot \overline{v}_i = 1$. OBS: ortonormala vektorer är automatiskt linjärt oberoende.
  - ON-bas: bas av ortonormala vektorer. Hittas mha Gram-Schmidt.
- Vektor/kryss-produkt
  - $|\overline{u} \times \overline{v}| = |\overline{u}||\overline{v}| \sin(\alpha)$ där α är vinkeln mellan $\overline{u}$ och $\overline{v}$.
  - $\overline{u} \times \overline{v}$ vinkelrät mot både $\overline{u}$ och $\overline{v}$.
  - Orientering: $(\overline{u}, \overline{v}, \overline{u} \times \overline{v})$ *högerorienterad.*
- Geometri
  - Ekvation för plan/linjer (med och utan parameterform.)
  - Skärning mellan {linje,plan} och {linje,plan}: lös ekvationssystem!
  - Avstånd mellan {punkt,linje,plan} till {linje,plan}: projicera! (Alternativ: ställ upp ekvationsystem för ortogonalitet etc och lös.)
- Matriser
  - Speciella matriser: enhetsmatriser, diagonala, över-triangulära, undertriangulära.
  - Transponat: med $A = (a_{ij})$ är $A^t = (a_{ji})$. A är *symmetrisk* om $A^t = A$. Notera att $(AB)^t = B^t A^t$.
  - En linjär avbildning $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ kan beskrivas med en $n \times m$ matris. ("Ta reda på var enhetsvektorerna tar vägen".)
  - Viktiga geometriska avbildningar: vridning, spegling, projektion.
- Ekvationssystem
  - Skrivs kort som: $A\overline{x} = \overline{b}$.
  - Om $\overline{b} = \overline{0}$ finns alltid den *triviala lösningen* $\overline{x} = \overline{0}$. Annars: lösning finns $\Leftrightarrow \overline{b} \in Range(A)$.
  - Hur lösa? Gausselimination! (Gör radoperationer tills systemet blir på trappform, bakåtsubstituera sedan.)
  - Minstakvadratmetoden: Om $A\overline{x} = \overline{b}$ saknar lösning, hitta "bästa möjliga lösning", dvs minimera felet $|A\overline{x} - \overline{b}|$. Hur? Lös

    $$A^t A\overline{x} = A^t\overline{b}.$$

    Alternativ: lös

    $$A\overline{x} = \overline{w}, \quad \overline{w} = P_W(\overline{b})$$

    där $W = Col(A)$.

- Determinanter
  - Geometrisk tolkning: $|\det(A)|$ ger area/volym (i $\mathbb{R}^2$ respektive $\mathbb{R}^3$.)
  - Viktig egenskap: determinanten som funktion i godtycklig rad/kolonn är linjär.
  - $\det(A)$ oförändrad vid vissa rad/kolonnoperationer (t.ex. lägg till multipel av en rad till en annan rad.) *Byter tecken* om vi byter plats på två rader/kolonner.
  - Regler: $\det(A^t) = \det(A)$, $\det(I) = 1$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
  - Uträkning av $\det(A)$.
    - 2×2: formel.
    - 3×3: formel eller Sarrus (men se även nedan.)
    - $n \times n$, $n > 3$:
      - $\det(A)$ lätt att räkna ut om A är övertriangulär - "gör om" A till övertriangulär mha radoperationer.
      - Utveckling efter rad/kolonn (speciellt om en rad/kolonn har många nollor.)
- Determinanter och ekvationssystem
  - Om A är kvadratisk har ekvationssystemet $A\overline{x} = \overline{b}$
    - *precis en* lösning oavsett vad $\overline{b}$ är om $\det(A) \neq 0$.
    - ingen, eller oändligt många lösningar (det beror på $\overline{b}$) om $\det(A) = 0$.
- Ickekvadratiska system: om $A\overline{x} = \overline{b}$ har fler obekanta än ekvationer så har:
  - $A\overline{x} = 0$ oändligt många lösningar.
  - $A\overline{x} = \overline{b}$, $b \neq 0$ antingen oändligt många lösningar, eller ingen lösning.
- Baser, beroende, oberoende.
  - *Linjärkombination*: uttryck på formen

    $$x_1\overline{v}_1 + x_2\overline{v}_2 + \ldots + x_k\overline{v}_k$$

    där $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_k$ är vektorer och $x_1, \ldots x_k$ skalärer.
  - *Linjärt oberoende*:

    $$x_1\overline{v}_1 + x_2\overline{v}_2 + \ldots + x_k\overline{v}_k = 0$$

    endast om $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$.
  - *Linjärt beroende*: kan hitta $x_1, \ldots, x_k$, ej alla lika med noll, så att

    $$x_1\overline{v}_1 + x_2\overline{v}_2 + \ldots + x_k\overline{v}_k = 0.$$

  - Kolonnvektorer i en kvadratisk matris är oberoende $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
  - *Bas* för $\mathbb{R}^n$: samling vektorer $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_k$ så att
    - $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_k$ är *oberoende.*
    - *Alla* $\overline{w} \in \mathbb{R}^n$ kan skrivas som

      $$\overline{w} = x_1\overline{v}_1 + x_2\overline{v}_2 + \ldots + x_k\overline{v}_k.$$

      ($x_1, x_2, \ldots, x_k$ kallas *koordinater för* $\overline{w}$ *i basen* $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k$.)
  - Om $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ är *oberoende* vektorer i $\mathbb{R}^n$ bildar de en bas.
- Inverser
  - Om A är kvadratisk matris och B är en matris så att $AB = BA = I$ (där I är identitetsmatrisen) är A *inverterbar.* Matrisen B skrivs oftast som A^{-1}.
  - A inverterbar $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

- Hur finna A^{-1}? Ställ upp ekvationssystem $(A|I)$ och gör radoperationer tills du får $(I|B)$; B är då inversen till A.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

- Egenvärden/egenvektorer
  - Om A är kvadratisk matris, $\overline{v} \neq 0$ en vektor och $\lambda \in \mathbb{R}$ så att
  $$A\overline{v} = \lambda\overline{v}$$
  säger vi att $\overline{v}$ är en *egenvektor* till A med *egenvärdet* λ.
  - Hur hitta egenvärden? Lös ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$.
  - Hur hitta egenvektor? Om $\det(A - \lambda I) = 0$ så har $(A - \lambda I)\overline{x} = 0$ icketriviala lösningar - lös ekvationssystemet!
  - När kan vi hitta bas av egenvektorer?
    * Spektralsatsen: en $n\times n$-matris A har n stycken *reella* egenvärden och n stycken *ortogonala* egenvektorer $\Leftrightarrow A^t = A$.
    * Om $\det(A - \lambda I) = 0$ har n stycken olika lösningar för en $n \times n$-matris A, så har A n stycken oberoende egenvektorer.
    * Om $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ för alla egenvärden λ, dvs samma algebraisk och geometrisk multiplicitet.
  - Om $\overline{w} = x_1\overline{v}_1 + x_2\overline{v}_2 + \ldots + x_k\overline{v}_k$ och $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_k$ är egenvektorer till en matris A, så är
  $$A^n\overline{w} = x_1\lambda_1^n\overline{v}_1 + x_2\lambda_2^n\overline{v}_2 + \ldots + x_k\lambda_k^n\overline{v}_k$$
  - Följd: Om $\lambda_1 = 1$ och övriga egenvärden har belopp mindre än ett så är systemet *stabilt*, dvs $A^n\overline{w}$ går mot $x_1\overline{v}_1$ då $n \to \infty$.
- Baser/koordinater: $B = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n\}$ bas för V.
  - $\overline{v} = \sum x_i\overline{v}_i$ omm $[\overline{v}]_B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$.
  - $[T]_B$ definieras av:
  $$\begin{array}{ccc} \overline{v} \in V & \xrightarrow{T} & V \ni T\overline{v} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ [\overline{v}]_B \in \mathbb{R}^n & \xrightarrow{[T]_B} & \mathbb{R}^n \ni [T\overline{v}]_B \end{array}$$
  - Hur byta bas? Lös ekvationssystem!
  - Basbytesmatriser: B, D baser, $[\overline{v}]_D = P_{B\to D}[\overline{v}]_B$, där $P_{B\to D}$ är basbytesmatrisen från B till D. Då gäller:
  $$[T]_D = P_{B\to D}[T]_B P_{D\to B} = P_{D\to B}^{-1}[T]_B P_{D\to B}$$
  eftersom $P_{B\to D} = P_{D\to B}^{-1}$.
  - Låt $T : V \to W$ vara linj. avb. Om $B = (\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n)$ är bas för V, och B' är bas för W så fås matrisen för T, relativt baserna B och B' av
  $$[T]_{B',B} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [T(\overline{u}_1)]_{B'} & [T(\overline{u}_2)]_{B'} & \ldots & [T(\overline{u}_n)]_{B'} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$
- Abstrakta vektorrum.
  - Underrum, beroende/oberoende, bas, dimension.
  - $F : V \to W$.
    * $\ker(F) \subset V$, $\mathrm{Range}(F) \subset W$ (underrum!).
    * $\dim(\ker(F)) + \dim(\mathrm{Range}(F)) = \dim(V)$
  - Om $\dim(V) < \infty$ och $F : V \to V$ så är F surj. omm F injektiv.
- Diagonalisering: givet kvadratisk matris A, hitta *diagonal* matris D och *inverterbar* matris P så att
$$A = PDP^{-1} \Leftrightarrow D = P^{-1}AP$$

- Kan diagonalisera en $n \times n$-matris $A \Leftrightarrow$ matrisen A har n *oberoende* egenvektorer.
  * Om $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n$ är egenvektorer till A, med egenvärden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, så är
  $$P = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \overline{v}_1 & \overline{v}_2 & \cdots & \overline{v}_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$
  och D är diagonalmatrisen med $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ på diagonalen.
- Om $A = PDP^{-1}$ så är $A^n = PD^nP^{-1}$. (Poäng: D^n lätt att beräkna.)
- Om $A^t = A$ kan vi hitta *ortogonal* diagonalisering, dvs P är ortogonal.

• Kvadratiska former
- Kan skrivas $q(x) = x^tAx$ där A är symmetrisk och $\overline{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^t \in \mathbb{R}^n$.
- Om egenvärdena till A är $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$, så är
  * A *positivt definit* om $\lambda_1 > 0$. (q *positivt definit* om $q(x) > 0$ för $x \neq 0$.
  * A *indefinit* om egenvärdena har olika tecken, dvs $\lambda_1 < 0, \lambda_n > 0$.
  * $\lambda_1|x|^2 \leq q(x) \leq \lambda_n|x|^2$ gäller för all $x \in \mathbb{R}^n$
  * Om $P^{-1}AP = P^tAP = D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sägs variabelbytet $x = Py$ *diagonalisera den kvadratiska formen* q; vi får $x^tA\overline{x} = y^tP^tAPy = y^tDy = \lambda_1y_1^2 + \ldots + \lambda_ny_n^2$.
  * P ortogonal ger att principalaxlarna för q är vinkelräta.