



KTH Teknikvetenskap

SF1624 Algebra och geometri
Tentamen med lösningsförslag
torsdag, 9 januari 2020

3 villkor.

1. Bestäm ett andragradspolynom vars funktionskurva passerar genom punkterna

$(1, 3), (2, -2), (3, -5).$

Tips: ansätt ett andragradspolynom och lös ett linjärt ekvationssystem där koefficienterna är de obekanta.

Lösningsförslag. Låt $p(x) = ax^2 + bx + c$. Eftersom $y = p(x)$ går genom punkten $(1, 3)$ är $a1^2 + b1 + c = 3$. Eftersom $y = p(x)$ går genom punkten $(2, -2)$ är $a2^2 + b2 + c = -2$. Eftersom $y = p(x)$ går genom punkten $(3, -5)$ är $a3^2 + b3 + c = -5$. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{array}{rrcr} a & + & b & + & c & = & 3 \\ 4a & + & 2b & + & c & = & -2 \\ 9a & + & 3b & + & c & = & -5. \end{array}$$

Vi löser systemet med Gausselimination.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 9 & 3 & 1 & -5 \end{array} \right)$$

Lägg till $-4r_1$ till r_2 och $-9r_1$ till r_3 .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -14 \\ 0 & -6 & -8 & -32 \end{array} \right)$$

Lägg till $\frac{1}{2}r_2$ till r_1 och $-3r_2$ till r_3 .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -4 \\ 0 & -2 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right)$$

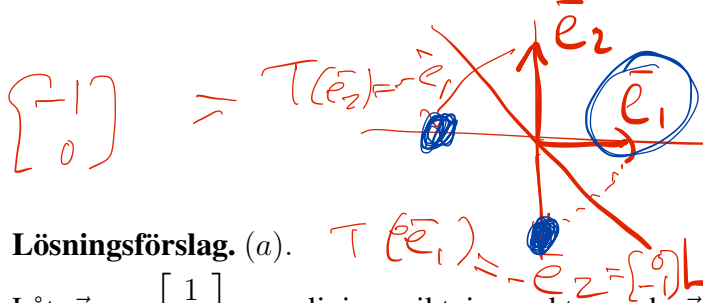
Lägg till $3r_3$ till r_2 och $\frac{1}{2}r_3$ till r_1 .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & -2 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right)$$

dvs $a = 1, b = -8, c = 10$. Det sökta polynomet är därför $p(x) = x^2 - 8x + 10$.

2. Låt $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara den linjära avbildning som avbildar en punkt i planet $\mathbb{R}^2$ på sin spegelbild i linjen $x + y = 0$.

- (a) Bestäm matrisen A för T i standardbasen för $\mathbb{R}^2$. (2 p)
- (b) Bestäm två linjärt oberoende egenvektor $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ till A . (2 p)
- (c) Bestäm matrisen B för T i basen $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. (2 p)



$$A = [T(\bar{e}_1) \ T(\bar{e}_2)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lösningsförslag. (a).

Låt $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ vara linjens riktningsvektor, och $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vara en ortogonalvektor till $\vec{v}_1$.

Matrisen A är den enda matrisen som uppfyller: $A\vec{v}_1 = \vec{v}_1$ och $A\vec{v}_2 = -\vec{v}_2$. Vi kan söka A med obestämda koefficienter:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Koefficienterna i matrisen kan hittas direkt ur sambanden $A\vec{v}_1 = \vec{v}_1$ och $A\vec{v}_2 = -\vec{v}_2$.

Man kan även förenkla ansatsen (och få samma resultat): eftersom avbildningen är en reflektion, vet vi att matrisen A är ortogonal (dvs. $A^T = A^{-1}$) med determinant -1 , alltså $c = b$, $d = -a$, och

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}.$$

Sambandet $A\vec{v}_1 = \vec{v}_1$ skrivs som

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ b + a = -1. \end{cases}$$

Detta ger $a = 0$, $b = -1$, och

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

En annan metod är att söka kolumnerna av A som bilderna av basvektorerna:

$$c_1(A) = T(\bar{e}_1) = 2\text{proj}_{\vec{v}_1} \bar{e}_1 - \bar{e}_1 = -\bar{e}_2$$

$$c_2(A) = T(\bar{e}_2) = 2\text{proj}_{\vec{v}_1} \bar{e}_2 - \bar{e}_2 = -\bar{e}_1,$$

som ger samma resultat.

(b). Vi vet att $T\vec{v}_1 = \vec{v}_1$ samt att $T\vec{v}_2 = -\vec{v}_2$, vilket betyder att $\vec{v}_1$ är en egenvektor med egenvärde 1, och $\vec{v}_2$ är en egenvektor med egenvärde -1 .

(c). I basen $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ har egenvektorerna följande koordinater: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi vill bestämma en matris B sådan att $B\vec{v}_1 = \vec{v}_1$ och $B\vec{v}_2 = -\vec{v}_2$. Denna blir en diagonalmatris med egenvärden på diagonalen:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Betrakta vektorerna $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, och $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$.

(a) Visa att $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$.

(b) Skriv $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ som en linjärkombination av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

(c) Bestäm den ortogonala projektionen av $\vec{w}$ på planet som spänns upp av $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$.

Lösningsförslag.

(a) Vi behöver visa att de tre vektorerna är linjärt oberoende. Detta kan göras genom att visa att följande determinant ej är noll:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 7 \cdot 2 = 2$$

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$
matris?

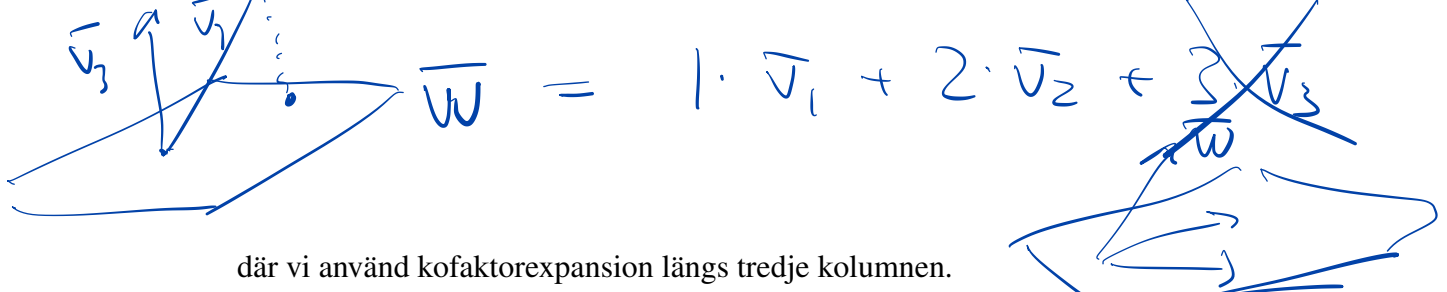
$$[T(\bar{e}_1) \ T(\bar{e}_2)]$$

$$A = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3]$$

$$A\bar{x} = \bar{b} \text{ eller } A\bar{x} = \bar{0}$$

$$A\bar{x} = \bar{0} \text{ (2 p)} \\ \text{betrakta } \bar{x} = \bar{0} \text{ (2 p)} \\ \text{(ober.)}$$

$$A\bar{x} = \bar{w}$$



där vi använd kofaktorexpansion längs tredje kolumnen.

- (b) För att skriva $\vec{w}$ som en linjärkombination $\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$ löser vi ekvationssystemet

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -7 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array} \right]$$

vilket med bakåtsubstitution ger lösningen $c_3 = 7$, $c_2 = 5$, $c_1 = 18$, dvs

$$\vec{w} = 18\vec{v}_1 + 5\vec{v}_2 + 7\vec{v}_3.$$

- (c) Vi noterar att $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$, det vill säga $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ är ortogonala. Projektionerna av $\vec{w}$ på de två vektorerna är:

$$\text{proj}_{\vec{v}_1} \vec{w} = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 = \frac{-4}{6} \vec{v}_1 = -\frac{2}{3} \vec{v}_1$$

$$\text{proj}_{\vec{v}_2} \vec{w} = \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}_2\|^2} \vec{v}_2 = \frac{-14}{14} \vec{v}_2 = -\vec{v}_2$$

och eftersom de är ortogonala är projektionen på planet därför:

$$-\frac{2}{3} \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = -\frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -10 \end{bmatrix}$$

4. Låt $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Beräkna A^{1000} .

(6 p)

Lösningsförslag. Eigenvärdena till A fås som lösningar till $\det(A - \lambda I) = 0$ och vi ser efter beräkning att

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff (1 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

så eigenvärdena till A är ± 1 . Eftersom det finns två linjärt oberoende egenvektorer till eigenvärdet 1 (ses efter beräkning) så är A diagonaliserbar. Dvs det finns en 3×3 -matris P och en diagonal matris D med eigenvärdena ± 1 på diagonalen, så att $A = PDP^{-1}$. Det följer att $A^{1000} = (PDP^{-1})^{1000} = PD^{1000}P^{-1} = PIP^{-1} = I$. Vi har alltså att $A^{1000} = I$, enhetsmatrisen i format 3×3 .

5. (a) Anta att vi vet att $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$ för någon vektor $\vec{u}$. Kan vi ur det dra slutsatsen att $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är lika? Om ja, så varför då? Om nej, så exakt vilka slutsatser kan vi dra om hur $\vec{v}$ och $\vec{w}$ ser ut, och varför? (3 p)

- (b) Anta att vi vet att $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ för alla vektorer $\vec{u}$. Kan vi ur det dra slutsatsen att $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är lika? Om ja, så varför då? Om nej, så exakt vilka slutsatser kan vi dra om hur $\vec{v}$ och $\vec{w}$ ser ut, och varför? (3 p)

Lösningsförslag.

- (a) Svar: Nej. Låt $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$.

- Om $\vec{u} = \vec{0}$ så är $\vec{n} = \vec{0}$ för alla $\vec{v}$ och $\vec{w}$ och vi kan inte dra någon slutsats alls.
- Om $\vec{u} \neq \vec{0}$ men $\vec{n} = \vec{0}$, så är $\vec{v}$ och $\vec{w}$ parallella med $\vec{u}$ men vi kan inte dra någon slutsats om deras längd.
- Om $\vec{n} \neq \vec{0}$, så har vi $\vec{u} \times (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{0}$ och vi kan dra slutsatsen att $\vec{v} = \vec{w}$ eller $\vec{u}$ är parallella med $\vec{v} - \vec{w}$ dvs. $\vec{w} = \vec{v} + t\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$. För varje $\vec{v}$ finns oändligt många sådana $\vec{w}$.

$A = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{bmatrix}$ diagonalisering! $\text{Exempel: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
 $X = \begin{bmatrix} d_1^{1/3} & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^{1/3} \end{bmatrix}$ $X^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(b) Svar: Ja. Bevis: Låt $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$. Så har vi $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = 0$ för alla $\vec{u}$ dvs. $\vec{v} - \vec{w}$ är ortogonal mot alla vektorerna $\vec{u}$. Endast vektorn som är ortogonal mot alla vektorerna är noll vektorn. Så kan vi dra slutsatsen att $\vec{v} - \vec{w} = 0$ dvs. $\vec{v} = \vec{w}$.

6. Låt A vara en symmetrisk $(n \times n)$ -matris. Visa att ekvationen

$$X^3 = A$$

har en lösning.

$\left[\begin{matrix} \sqrt[3]{1} & \\ & \sqrt[3]{2} \end{matrix} \right]^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (6 p)

Lösningsförslag. Eftersom matrisen A är symmetrisk så är den ortogonalt diagonaliserbar, vilket betyder att

$$A = PDP^T$$

där P är en ortogonal matris och $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ är en diagonal matris.

Låt den diagonala matrisen R vara given av

$$R = \text{diag}((\lambda_1)^{1/3}, (\lambda_2)^{1/3}, \dots, (\lambda_n)^{1/3}).$$

Observera att detta är definierat oavsett tecken på $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ då tredje-roten $x \mapsto x^{1/3}$ är definierad för alla reella tal x . Matrisen R uppfyller

$$R^3 = D.$$

Sätt $X = PRP^T$. Eftersom $P^T P = I$ gäller då att

$$X^3 = (PRP^T)^3 = PR(P^T P)R(P^T P)RP^T = PR^3 P^T = PDP^T = A,$$

så vi har hittat en lösning till ekvationen.

$A = P D P^{-1}$, D diagonal

$X = P D^{1/3} P^{-1}$

$\text{Ex } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{1/3} = \begin{bmatrix} 1^{1/3} & 0 \\ 0 & 2^{1/3} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow X^3 = P (D^{1/3})^3 P^{-1}$