

SF1624, F9. (4.2 forts.
+ 4.3)

Kort rep: Sats 4.2.2

Om $A \sim B$ (en radoperation)

Så gäller: OBS: $k \neq 0$

a) $\det(B) = k \cdot \det(A)$ ($\bar{r}_i \rightarrow k \cdot \bar{r}_i$)

b) $\det(B) = -\det(A)$ (byt plats)

c) $\det(B) = \det(A)$ ($\bar{r}_i \rightarrow \bar{r}_i + t \cdot \bar{r}_j$
($i \neq j$)).

Hitta $\det(A)$ för "hurska" A .

Gör om A till trappform (aka Gauss!)

och använd sedan

sats 4.1.3 (triangulära
matriser).

Ex: $A \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & ? & ? & ? \\ 0 & 2 & ? & ? \\ 0 & 0 & 3 & ? \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \det(A) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4.$

Men: håll koll tecken om
du byter rader.

och: håll koll på skalören
om du multiplicerar rad.

Se ex 4.2.5 i boken!

Sats (4.2.4 viktig): En kvadratisk
matris A är inverterbar
 $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Beweiside: Gör om A till reducerad
trappform. ($A \sim \dots \sim R$)

Notera nu:

Nollrad i $R \Rightarrow \begin{cases} A \text{ ej inverterbar.} \\ \det(R) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0. \end{cases}$

Ingen nollrad i R : $R = I$

$\hookrightarrow A$ är inverterbar.

$$\Rightarrow \left\{ \det(R) = \det(I) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0. \right.$$

Ann! Viktig observation:

$$\text{Om } A \sim B \quad \text{så} \quad \vec{a} \sim$$

$$\det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(B) = 0.$$

$$\underline{\text{Ex}}: \quad a) : A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(\vec{v}_1 \rightarrow 2 \cdot \vec{v}_1). \\ (k=2).$$

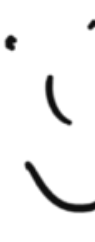
$$c) : A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3+2 & 4+4 \end{bmatrix} \begin{matrix} (\vec{v}_1) \\ (\vec{v}_1 + 2 \cdot \vec{v}_1) \end{matrix}$$

$$b) : A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} (\vec{v}_2) \\ (\vec{v}_2) \end{matrix} \\ (\text{byt plats!})$$

Följdsats (4.2.3) Monstret växer!

Sats (4.2.5): Låt A, B är
 $n \times n$ matriser. Då är

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Inget bevis - se bok.  .

Följsats (4.2.6): Antag att
 A är inverterbar. Då är

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Bervis: A inverterbar $\Rightarrow$ kan hitta
 A^{-1} så att $A \cdot A^{-1} = I$

$$\Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I) = 1.$$

//

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}).$$

$$\therefore \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}. \quad \square.$$



Kap 4.3. (Mer om det.).

Mer rep:

Låt $A = [a_{ij}]$ vara $n \times n$ matris.

Minor M_{ij} : $\det \left(\begin{array}{c} A \text{ med rad } i \\ \& \text{ kolonn } j \\ \text{struken.} \end{array} \right)$

$$\text{Kofaktor } C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$\text{Pöång: } \det(A) =$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij} \quad (\text{utveckling efter Kolonn } j)$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij} \quad (\text{utveckling efter rad } i).$$

Vad händer om vi sätter in "fel rad" ur A i formeln; om $k \neq i$

vad blir

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} C_{ij} \quad ? \quad \text{Ja, vi får}$$

$\sum_{j=1}^n a_{kj} C_{ij}$ alltid 0:

Sats 4.3.1 Om $k \neq i$ så är

$$\sum_{j=1}^n a_{kj} C_{ij} = 0.$$

Beweiside: Säg $n=3$, $k=1$, $i=2$.

Notera att $a_{11}C_{21} + a_{21}C_{22} + a_{13}C_{23}$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

B

(utveckla efter rad 2 och notera att A & B har samma rad 2-kofaktorer!)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Men: B har två lika rader

$$\Rightarrow \det(B) = 0.$$

$$\therefore a_{11}C_{21} + a_{21}C_{22} + a_{13}C_{23} = 0. \quad \square$$

Def! Låt A vara en matris,
med kofaktorer C_{ij} .

Matrisen $C = [C_{ij}]$ kallas
för A 's kofaktor matris.

Matrisen $\text{adj}(A) = C^T$ kallas
för den adjungerade matrisen
till A .

Poäng: vi får formel för A^{-1} !

~~Sats~~ (4.3.3) Om A är matris!
inverterbar så är

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A).$$

(Beweis: använd Sats 4.3.1;
se boh.).

Öö: Låt $A = [a_{ij}]$ vara matris
med $\det(A) = 1$, och låt

$B = A^{-1}$; $B = [b_{ij}]$. Visa att om alla a_{ij} är heltal, så är alla b_{ij} också heltal.

Cramers regel: Antag att

$A = [\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n]$ är $n \times n$ matris med $\det(A) \neq 0$. Då kan vi lösa $A\bar{x} = \bar{b}$ så här :

$$\text{Låt } \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{Låt } A_1 = \begin{bmatrix} \bar{b} & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 & \dots & \bar{a}_n \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 & \bar{b} & \bar{a}_3 & \dots & \bar{a}_n \end{bmatrix}, \dots, A_n = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \dots & \bar{a}_{n-1} & \bar{b} \end{bmatrix}$$

$$\text{Då gäller att } x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}.$$

(för $i = 1, \dots, n$).

"Formel för lösning till $A\bar{x} = \bar{b}$).

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, och

låt $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Vem lösning till $A\bar{x} = \bar{b}$.

Di är:

$$x_1 = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)} = \frac{1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0}{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2} = 0$$

$$x_2 = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right)} = \frac{2 - 3}{4 - 6} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ är lösning.

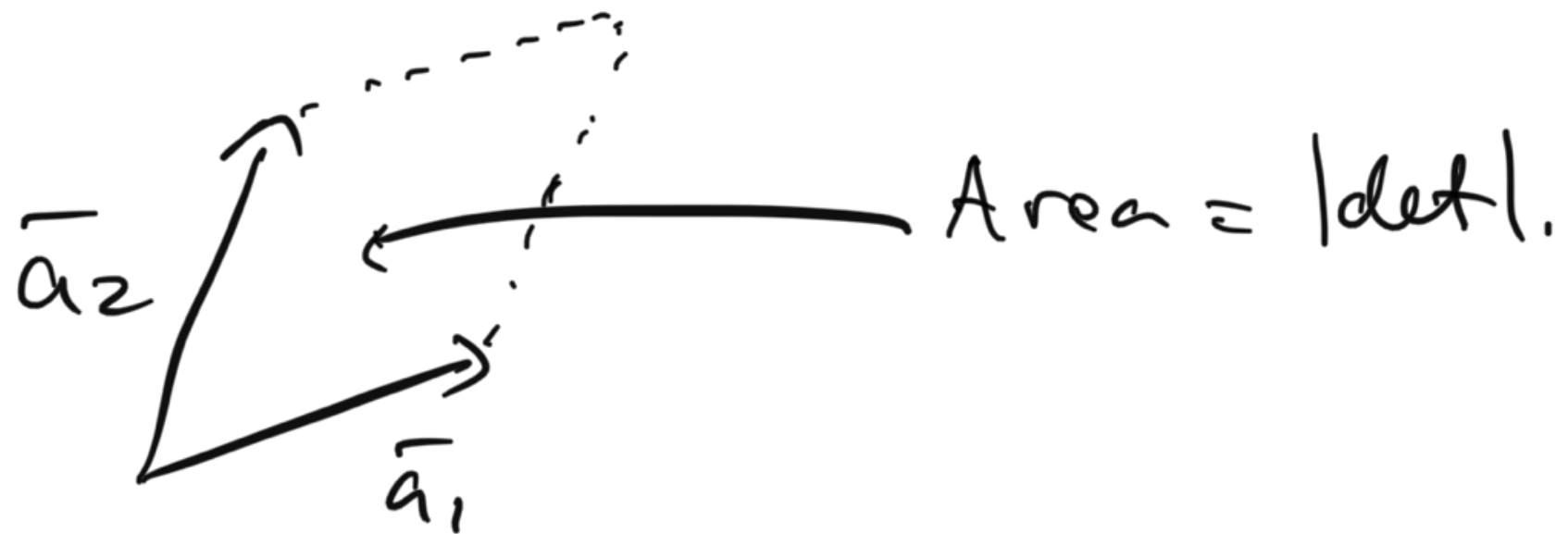
Ö: dubbelkolla!

Geometrisk tolkning av $\det(A)$ ($n=2,3$).

Sats: g) $A = [\bar{a}_1, \bar{a}_2]$ 2×2 matrix

$\rightarrow |\det(A)| = \text{arean av parallelogramman}$

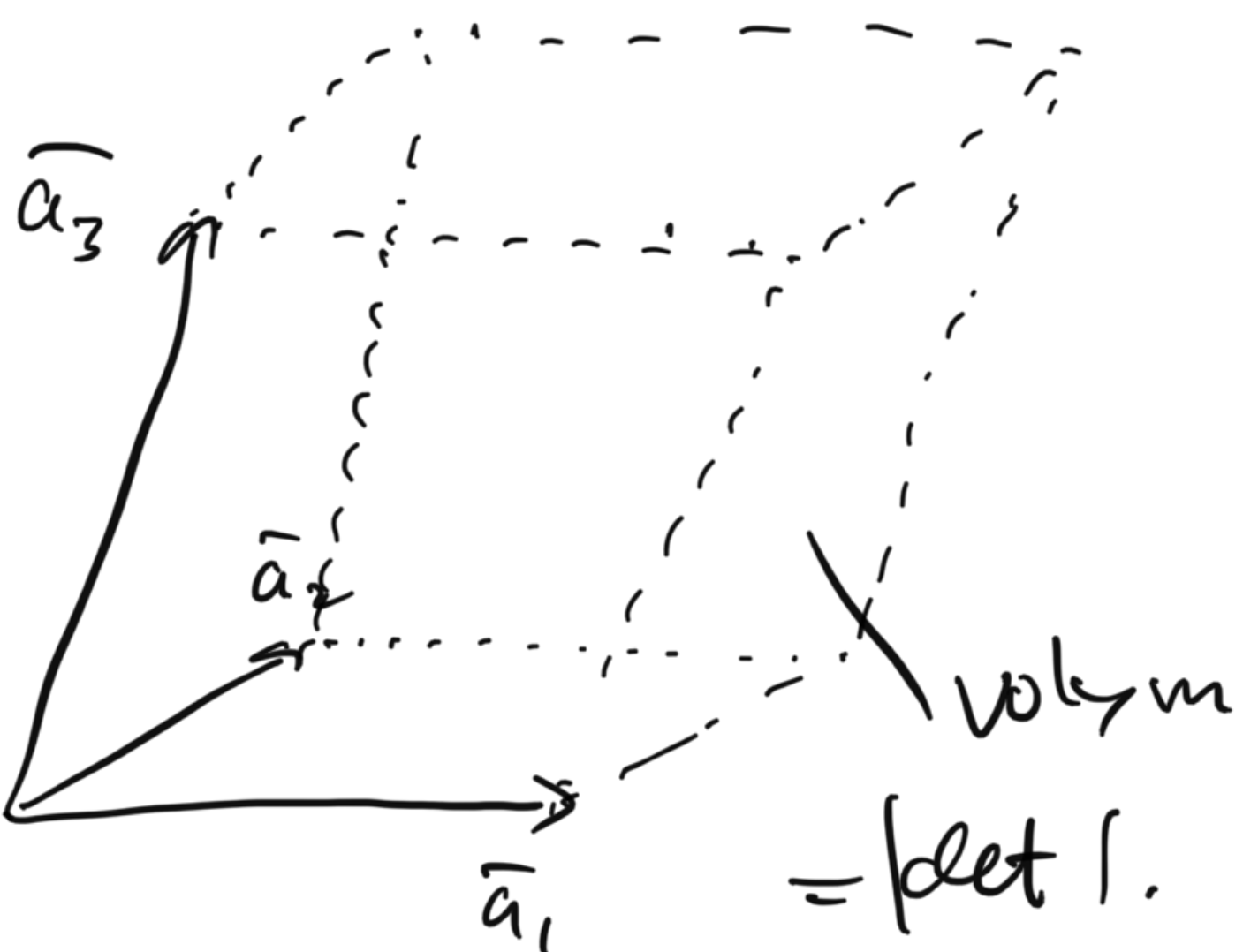
$\Rightarrow |\det(A)|$ - volumen av
 parallelogrammet som spennes
 opp av $\bar{a}_1, \bar{a}_2$



b) $A = [\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3]$ 3×3 matrix

$\Rightarrow |\det(A)| = \underline{\text{volumen}}$

av parallellpiped som spennes
 opp av $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$.

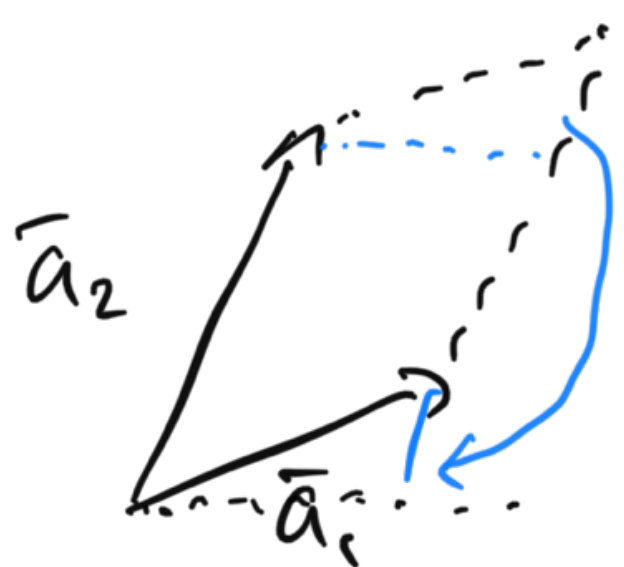


1d' (n=2): Notera att varken

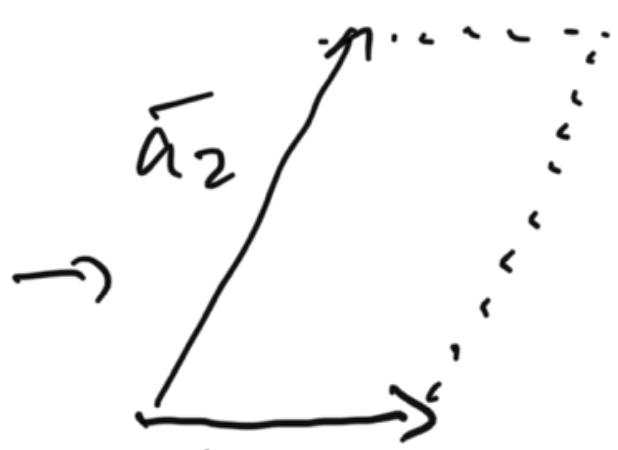
det eller eller area ändras

om vi gör kolonnoperationer

pö $A = [\bar{a}_1, \bar{a}_2]$. (Dvs $\bar{c}_1 \rightarrow \bar{c}_1 + 2 \cdot \bar{c}_2$)
etc

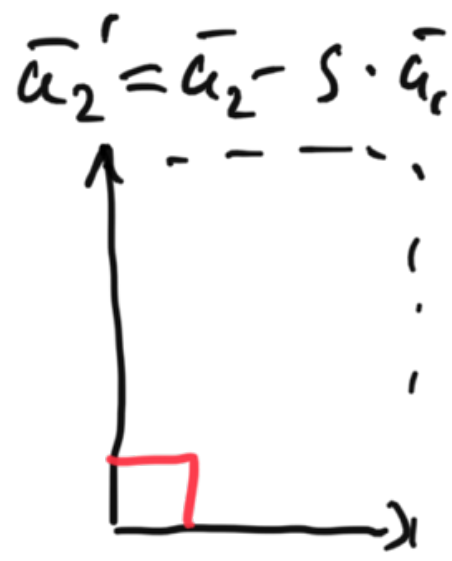


①



$$\bar{a}_1' = \bar{a}_1 - t \cdot \bar{a}_2$$

②



$$\bar{a}_2' = \bar{a}_2 - s \cdot \bar{a}_1$$

③

Pöng: SAMMA area pö

paralleler $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ som paralleler $(\bar{a}_1', \bar{a}_2')$.

OK H

$$\det([\bar{a}_1, \bar{a}_2]) = \det([\bar{a}_1', \bar{a}_2'])$$

relaterade mha
radoperationer som
ej ändrar det;

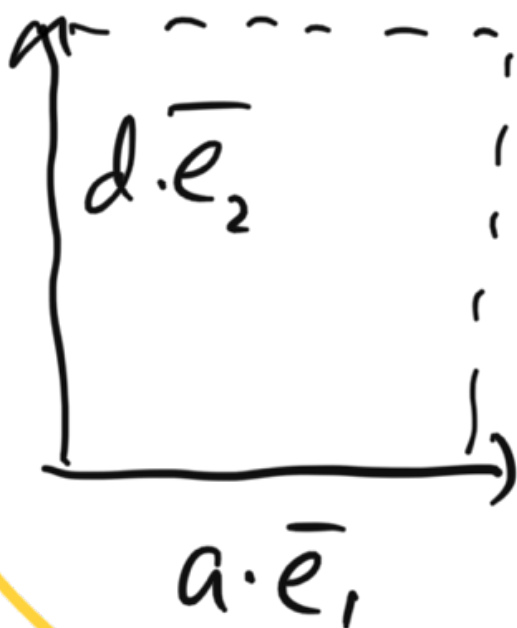
∴ Vi kan reducera till fall

Γ a 0 0

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a} & \vec{d} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = ad$$

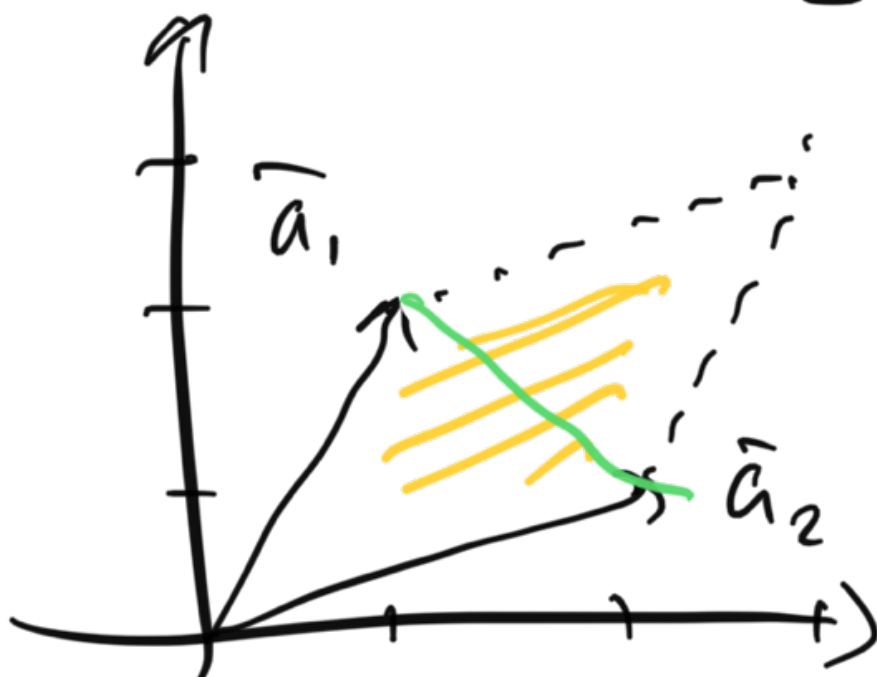
och arean $\left(\begin{array}{c} \vec{d} \cdot \vec{e}_2 \\ \vec{a} \cdot \vec{e}_1 \end{array} \right) = a \cdot d.$

(Se bok för annat bevis.).



Ex: Area av parallelogrammet som spänns

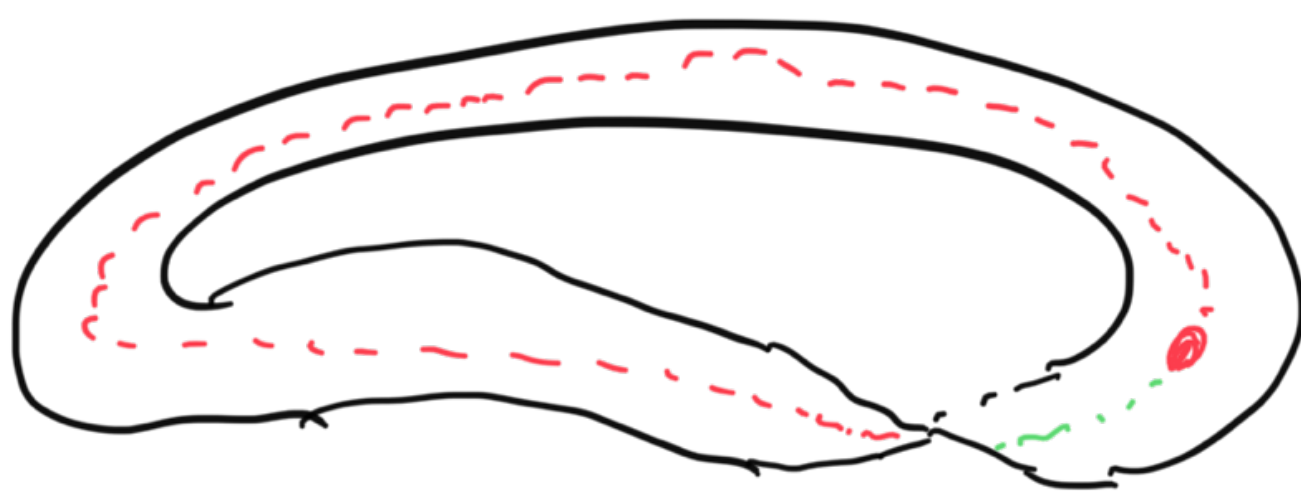
upp av $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ & $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$



$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 4 = -3$

Så: $\text{Area} = |\det(\vec{r}_1, \vec{r}_2)| = |\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}|$
 $= |1 \cdot 1 - 2 \cdot 2| = |-3| = 3.$

kan vara negativ!



- Ö: ① Gö - ett papper möbius. ↗
- ② Klipp längs mitten —
vad händer?
- ③ Klipp det som blev kvar.

Kryssprodukten $(i \mathbb{R}^3).$

Det: Givet $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$

och $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$

definieren wir $\vec{v}$ Kreuzprodukt

$\vec{u} \times \vec{v}$ Sum:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Minnesregel:

$$\det \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{matrix} & + & - \\ \swarrow & & \searrow \end{matrix}$$
$$= \hat{x} (u_2 v_3 - u_3 v_2) + \hat{y} (u_3 v_1 - u_1 v_3) + \hat{z} (u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

y-Komp

z-Komp

$$\rightarrow (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Satz 4.3.8 (Rechenregeln).

a) $\vec{u} \times \vec{v} = - \vec{v} \times \vec{u}$ (!!) ↑

b) $\sim e_j$ se bok!

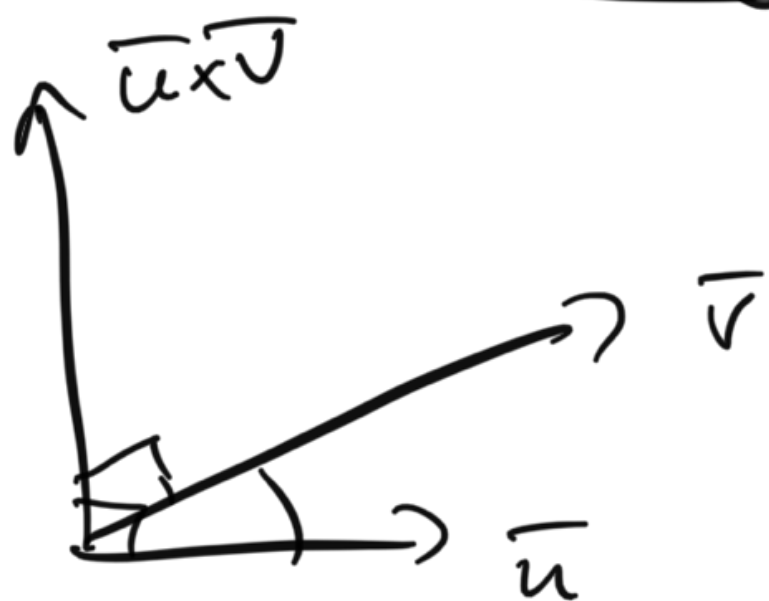
f) $\bar{u} \times \bar{u} = \bar{0}$ ↑ OBS! (!!).

Sats 4.3.9. (Viktigt).

a) $\bar{u} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = 0$

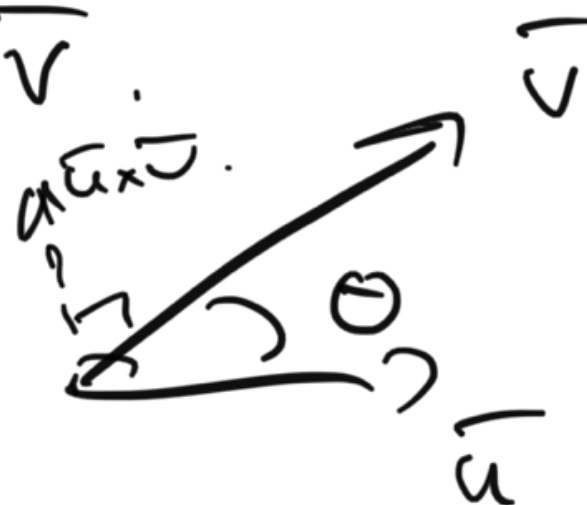
b) $\bar{v} \cdot (\bar{u} \times \bar{v}) = 0$

∴ $\bar{u} \times \bar{v}$ är ortogonal mot $\bar{u}, \bar{v}$.



Sats 4.3.10. Låt $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^3$ (båda $\neq \bar{0}$)

och låt θ vara vinkeln mellan $\bar{u}$ & $\bar{v}$.



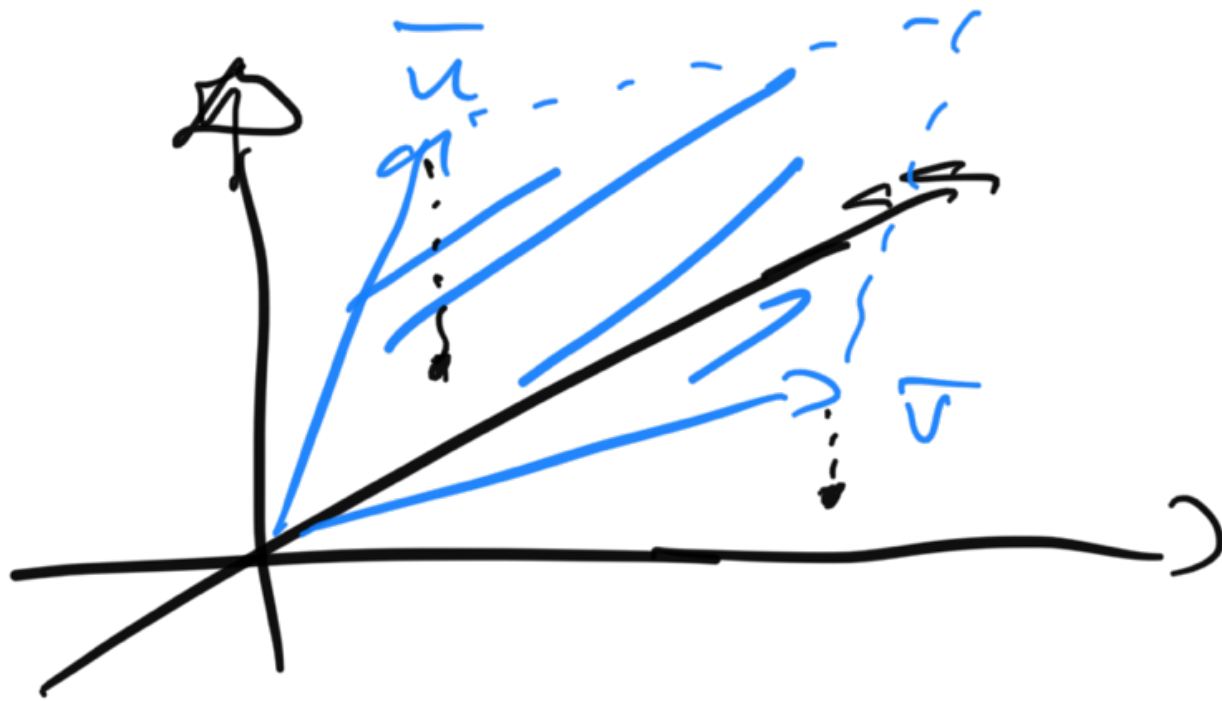
Det är:

a) $|\bar{u} \times \bar{v}| = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \sin \theta.$

b, ~~Area~~ Area av parallelogrammen A (i $\mathbb{R}^3$)

Som spänns upp av $\bar{u}$ & $\bar{v}$

ges av $A = |\bar{u} \times \bar{v}|$.



Anm: Kan visa att

$(\bar{u}, \bar{v}, \bar{u} \times \bar{v})$ är höger-

orienterad (om allt $\neq \vec{0}$).

$\bar{u}$:	tumme	} höger hand!
$\bar{v}$:	pekfinger	
$\bar{u} \times \bar{v}$:	långfinger	