

SF 1624, F8 (4.1-4.2)

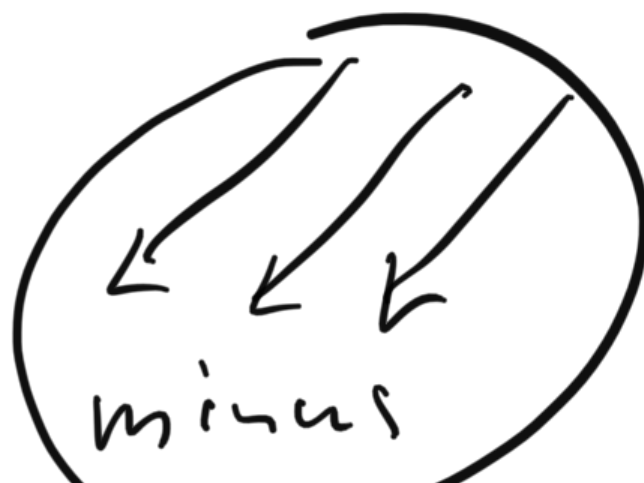
* Kursnämnd: bärna CSAMH
har hört av sig - andva
program!? i.

4.1 Determinanter

Låt A vara $n \times n$ matris
(kvadratisk!).

$$n=2: A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \det(A) = ad - bc$$

$$n=3: A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$



(med "wraparound").

$$\det(A) = +a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} a_{23} \cdot a_{31} \\ + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

(se även fig 4.1.1.)

Ex: $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$+ 1 \cdot 0 \cdot 0 + \underline{2 \cdot 1 \cdot 1} + \underline{3 \cdot 1 \cdot 1} \\ - \underline{1 \cdot 1 \cdot 1} - \underline{2 \cdot 1 \cdot 0} - \underline{3 \cdot 0 \cdot 1} \\ = 2 + 3 - 1 = 4.$$

Anm: Skriver ofta $\det(A)$ som $|A|$. ("dåligt": kan ha $|A| < 0$).

Q: $\det(A)$ om $n \geq 4$!?

Idé: bilda summan av alla produkter som fås genom att veta

ett tal per rad och kolonn!

(Och välj tecken "listigt"!))

$$\det(A) = \sum (\pm) a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

där $j_1, j_2, \dots, j_n$ är talen

$1, 2, 3, \dots, n$ i någon ordning.

Tecken: se bok, eller:

antal $\checkmark$

$(-1)^{\text{antal}}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Antal $\checkmark$: 3st

tecken: $(-1)^3 = -1$.

produkt: $-2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Antal $\checkmark$: 2st

tecken: $(-1)^2 = 1$.

produkt: $+1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Antal $\checkmark$: 3st

$\Rightarrow$ tecken = -1.



produkt: $- 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4.$

OBS: Glöm ej: måste bilda alle produkter! Tex, för $n=5$

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

(Allmänt: $A_{n \times n} \Rightarrow n!$

termer. $n=10$
oh p^o dator.

$n=100$:
Superdator "dör".

Sats: Om A har en rad
(eller kolonn) med bara nollor,
Så vet vi att $\det(A) = 0$.

Beweiside:

$$\det(A) = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}.$$

$$\text{Säg att } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$\rightarrow a_{ii} = 0 \quad \forall i$

$$\Rightarrow \det(A) = \sum (\pm) (0 \cdot a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}) = 0$$

$$= \sum (\pm) \cdot 0 = 0. \quad \square.$$

Satz (4.1.3) Omär triangulär matrix (dvs bara vollar ovanför diagonalen, eller bara vollar nedanför diagonalen), så är

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii} \quad \left(\begin{array}{l} \text{"produkt"} \\ \text{"länge diagonal"} \end{array} \right)$$

"pi"

Summa: $\sum_{i=1}^n$

Produkt: $\prod_{i=1}^n$ Ex: $\prod_{i=1}^5 i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5!$

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$

"övertriangulär matrix"

Ex: Undertriangulär: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 9 & 9 & 3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \det(A) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

Beweise: $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Enda elementet $(i, A) \neq 0$ i kolonn 1

är: 1.

Enda fullständiga elt i A i kolonn 2
är 5 & 2. Men kan vi välja 5
om vi valt 1 (i kol $\neq$ i.).

$\therefore$ Måste välja 2:an.

P.S.S: Måste välja 3 i kolonn 3

och 4 i kolonn 4

Dvs: enda ^{produkt} term som $\neq 0$ är
längs diagonalen!

Tecken !? + eller - ?



Inger ✓

$$\text{dvs tecken} = (-1)^0 = 1.$$

storleks
ordning $\therefore + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$.

Anm: $\det(A) = \sum (\pm) a_{1j_1} \cdots a_{nj_n}$

tar tid $\sim n!$ (för $n \times n$ matriser),
värdefullt om n (säg) $= 1000$.

($1000!$ jättestort!!).

Bättre sätt: rekursiv definition;
givet "recept" för 3×3 determinanter
Kan vi räkna 4×4 , och
sedan 5×5 , och sen 6×6
etc etc.

Def: Givet en $n \times n$ matris $A = [a_{ij}]$

Så ges minoren M_{ij} för a_{ij}

av determinanten för $(n-1) \times (n-1)$
matrisen vi får genom att stryka

rad i & kolonn j i A .

Telet $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ kallas

för kofaktorn till hörande a_{ij} .

→ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ex: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

$$M_{12} = \det \left(\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{1} \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 2 \cdot 7 - 3 \cdot 4 = 14 - 12 = 2.$$

$$\therefore M_{12} = 2.$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot 2 = -2.$$

$$(-1)^{1+1} = (-1)^2 = +1$$

Anm: tecken "via bild": $\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$

Ex: $M_{11} = \det \left(\begin{bmatrix} \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \right)$

Sats (4.1.5): $\det(A)$ förs ut

"kofaktor expansion" efter godtycklig

kolonn (eller rad):

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij} \quad (\text{kolonn } j)$$

n

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij} \quad (\text{rad } i).$$

Ex: $A = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
 $\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$

After rad 1: $0 \cdot C_{11} + 1 \cdot C_{12} + 0 \cdot C_{13} =$

$= \underline{0} \cdot M_{11} - \underline{1} \cdot M_{12} + \underline{0} \cdot M_{13} =$ below
ej

$= \underline{0} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \underline{0} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$

$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

$= (-1) \cdot (1 \cdot 4 - 2 \cdot 3) = (-1) \cdot (-2) = 2.$

After column 2: $A = \begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 1 & \underline{0} & 2 \\ 3 & \underline{0} & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$

$\det(A) = \cancel{0} \cdot C_{12} + \underline{0} \cdot C_{22} + \underline{0} \cdot C_{32}$

$1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

$= (-1) \cdot (1 \cdot 4 - 2 \cdot 3) = (-1) \cdot (-2) = 2.$

Ann: förflytt att göra expansion

i rad/kolumn med många nollor!
(se Ex 4.1.5 i boken).

Kap 4.2 - determinantegenskaper

Sats 4.2.1: Låt A vara $n \times n$ matris.

$$\text{Då är } \det(A^T) = \det(A).$$

Beweis: se bok.

Sats 4.2.2 Låt A vara en $n \times n$

matris, och anta att B fås
via en elementär radoperation
på A . Då gäller:

a) $\det(B) = k \cdot \det(A)$ (mult. av rad
med $k \neq 0$).

b) $\det(B) = -\det(A)$ (byt plats
på rader).

c) $\det(B) = \det(A)$ (lägg till
...

multiplera av
rad till annan
rad.

Anm: Satsen gäller även för
motsvarande kolonnoperationer.

Ex: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$

(dvs byt plats!).

De blir $\det(B) = -\det(A)$.

Koll: $\det(A) = ad - bc$

$$\det(B) = cb - ad = -(ad - bc)$$

$$\therefore \det(B) = -\det(A).$$

Hurra! :)

Följsats (4.2.3): Låt A vara
en $n \times n$ matris. De gäller:

a) A har två lika rader $\Rightarrow \det(A) = 0$

b) A har två proportionella rader $\Rightarrow \det(A) = 0$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\Rightarrow \det(A) = 0$

$$c, \det(k \cdot A) = k \cdot \det(A).$$

Anm: motsvarande sats för kolonner.

Beviside: (för a):

$$A = \begin{bmatrix} - & \sqrt{2} & - \\ - & \sqrt{2} & - \\ - & \sqrt{3} & - \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} - & \sqrt{2} & - \\ - & \sqrt{2} & - \\ - & \sqrt{3} & - \end{bmatrix}.$$

(dvs bytt plats
på $\sqrt{2}$ & $\sqrt{3}$).

$$\text{Om } \sqrt{2} = \sqrt{3} \Rightarrow A = B.$$

$$\text{Å ena sidan: } \det(A) = \det(B).$$

Å andra sidan: Sats ger att

$$\det(B) = -\det(A)$$

$$\Rightarrow \det(A) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0$$

□.

POÄNG:

Kan använda Sats 4.2.2

för att för enkla det-

någon del

1. a. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

Ex:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

row operations

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

column operations

$\vec{c}_1 - \vec{c}_2$

$\vec{c}_3 - \vec{c}_2$

$$\therefore \det(A) = \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= + 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2.$$

+

Alt: $\det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = 0 \cdot ? - 1 \cdot M_{12} + 0 \cdot ?$

$$= -M_{12} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = - (0 \cdot 0 - 1 \cdot 2)$$

$$= - (-2) = 2.$$