

SF1624, F7 (Kap 3.4 - 3.5)

URSÄKTA !!

Delrum: Ex: $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \in \mathbb{R}^n \\ t \cdot \bar{v}_1 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Def: $V \subset \mathbb{R}^n$ sägs vara ett delrum om följande gäller:

① $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V \Rightarrow \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \in V$

② $* t \in \mathbb{R}, \bar{v} \in V \Rightarrow t \cdot \bar{v} \in V.$

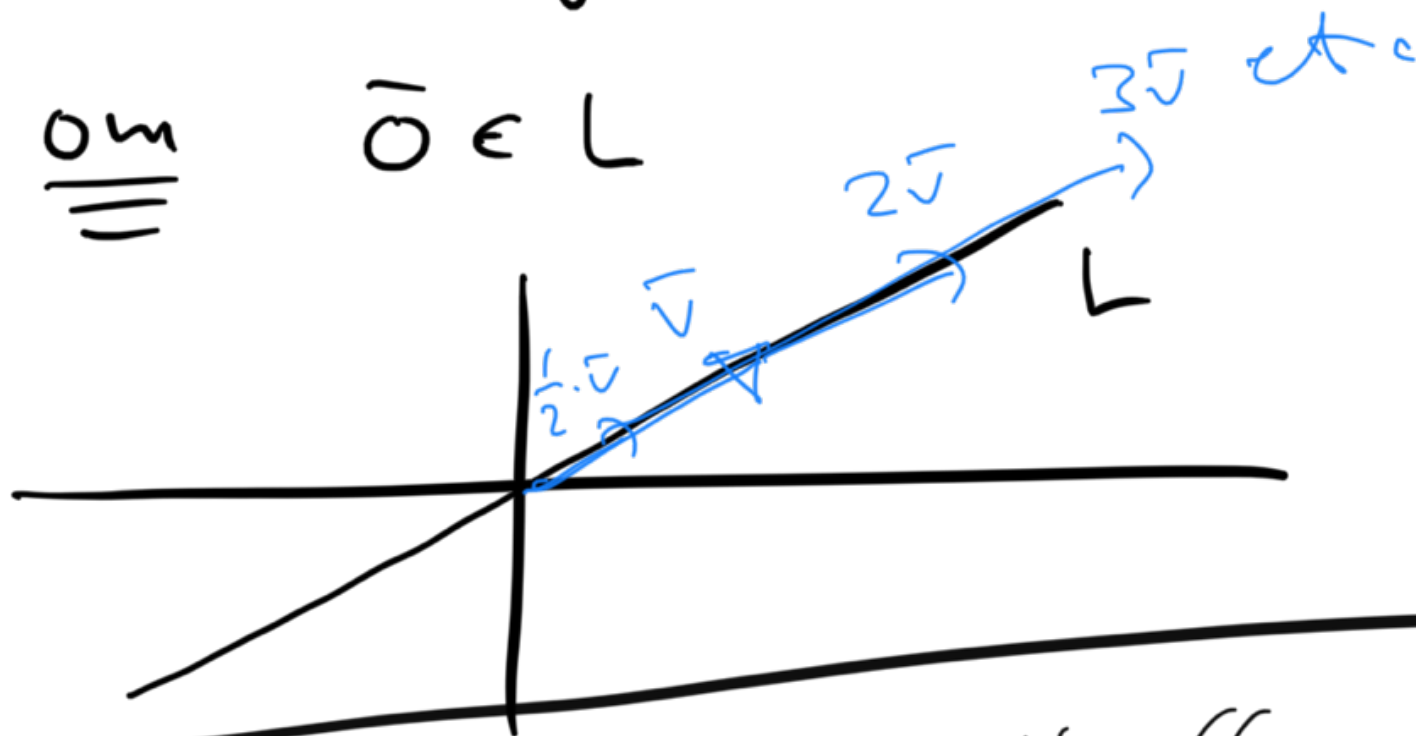
Anm: ① "slutet under +"

② "slutet under skalär multiplikation"

Ex: Linje $L \subset \mathbb{R}^2$ är delrum

om

$$\vec{0} \in L$$



Vad betyder " $\subset$ ": delmängd.

Skriv $A \subset B$ (A är delmängd till B)

$$\text{om } x \in A \Rightarrow x \in B.$$



"Bygga delrum": tag $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s \in \mathbb{R}^n$

och "fyll ut".

Sats: (3.4.2) Låt $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s \in \mathbb{R}^n$.

Mängden av linjärskombinationer

$$\left\{ \sum_{i=1}^s t_i \bar{v}_i, t_1, \dots, t_s \in \mathbb{R} \right\}$$

bildar ett delrum.

$\text{Span}(\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s\})$
= linj. hölje.

Anm: Detta delrum kallas
otta "Span" ~~$\mathbb{R}^n$~~ ("höljet" eller
"linjära höljet") av vektorerna

Beviside: $t \in \mathbb{R} \Rightarrow t \left(\sum_{i=1}^s t_i \bar{v}_i \right)$

$$= \sum_{i=1}^s (t \cdot t_i) \cdot \bar{v}_i = \sum_{i=1}^s \tilde{t}_i \bar{v}_i$$

(om vi låter $\tilde{t}_i = t \cdot t_i$), där

en linjärskombination av $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s$.

$\therefore$ Span slutet under skalär

multiplikation.

Ö: visa slutet under ~~plus~~ plus.

Ex: Delrum i $\mathbb{R}^2$:

① Hela $\mathbb{R}^2$. ("trivialt" delrum).

② Linjer som går genom origo.

③ $\{\vec{0}\}$ ("trivialt")

Ex: Delrum i $\mathbb{R}^3$

① Hela $\mathbb{R}^3$ ("trivialt")

② Alla linjer (som går genom $\vec{0}$)

③ Alla plan (som går genom $\vec{0}$).

④ $\{\vec{0}\}$. ("trivialt")

Sats (3.4.3, "delrum via lösning-
mängd till ekvationer")

Låt A vara en $m \times n$ matris.

Då är

$\left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : A\bar{x} = \bar{0} \right\}$ ett delrum
 $\uparrow$
OBS! Homogen ekv.

Bevis: Antag att $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ uppfyller

$$A\bar{x}_1 = A\bar{x}_2 = \bar{0}. \quad \text{Då är}$$

$$A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = A\bar{x}_1 + A\bar{x}_2 = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$$

$\therefore$ slutet under +.

Ö: visa att $t \in \mathbb{R}, A\bar{x} = \bar{0} \implies$

$$A(t \cdot \bar{x}) = \bar{0} \quad (\text{dvs visa slutet under skal. mult.}).$$

Med övrig: vi får slutet under +

& skal mult, dvs delrum!

Ann: Kallar $\left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : A\bar{x} = \bar{0} \right\}$

"S: att"

för Lösningsrummet till ekvations-
systemet.

Ann: $A\bar{x} = \bar{0}$: hur hitta
alla $\bar{x}$? Gaussen i botten!

$\rightsquigarrow$ finner en lösning på formen

$$(*) \bar{x} = t_1 \cdot \bar{v}_1 + t_2 \cdot \bar{v}_2 + \dots + t_s \cdot \bar{v}_s$$

(s : antal fria variabler)

(*) Kallas "allmän lösning".

Sats (3.4.4 : används senare):

a) Antag att A har n kolonner.

$$\text{Då är } \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : A\bar{x} = \bar{0} \} = \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow A = 0 \quad (\text{nollmatrisen!})$$

b) Antag att A, B har n kolonner.

$$\text{Då är } A = B \Leftrightarrow A\bar{x} = B\bar{x}$$

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Bevis: a) $\Rightarrow$: Skriv $A = [\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n]$

$$\text{och notera att } A \cdot \bar{e}_1 = A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \bar{a}_1 + 0 \cdot \bar{a}_2 + \dots + 0 \cdot \bar{a}_n$$

$$= \bar{a}_1. \quad \text{P.S.S.} \quad A \bar{e}_j = \bar{a}_j.$$

$$\therefore A \bar{x} = \bar{0} \quad \forall x \Rightarrow A \bar{e}_j = \bar{a}_j = \bar{0}$$

$$\text{dvs} \quad \bar{a}_j = \bar{0} \quad \forall j \Rightarrow A = [\bar{0} \bar{0} \dots \bar{0}]$$

dvs $A = 0$.

$$\Leftarrow : A = 0 \Rightarrow A \cdot \bar{x} = 0 \cdot \bar{x} =$$

$$= \bar{0} \quad \forall \bar{x}. \quad \square.$$

(Del 4: se bok.)

" $\forall$ " lös som "för alla".

" $\exists$ " — 1. — "det existerar"

~~Exempel~~

$$x \in A$$



"lös som" x tillhör A .

Kolla om $\bar{b} \in \text{Span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s)$:

Bilda $A = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_s]$, lös

Sedan $A\bar{x} = \bar{b}$. (Isa, fråga).

Låt $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_s \in \mathbb{R}^n$. Vi säger
att vektorerna är linjärt oberoende
om $\sum_{i=1}^s c_i \bar{v}_i = \bar{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_s = 0$.

("bara trivial lösning").

Om ~~det~~ det finns Skalärer

$c_1, c_2, \dots, c_s$, ej alla = 0,

så att $\sum_{i=1}^s c_i \bar{v}_i = \bar{0}$ säger vi

att vektorerna är linjärt beroende

Ex: $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n \in \mathbb{R}^n$ är
linjärt oberoende!

Ty: $\sum_{i=1}^s c_i \cdot \bar{e}_i = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + c_s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

(c, 7)

$$= \begin{pmatrix} c_2 \\ \vdots \\ c_s \end{pmatrix} = \vec{0} \implies c_1 = c_2 = \dots = c_s = 0$$

das vektorekna är oberoende.

* Intuition: oberoende vektorer
"pekar åt olika håll".

(Men OBS!): använd definitionen)

Sats (3.4.6): Låt $s \geq 2$. Om

$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_s$ linjärt beroende

$\implies$ en av vektorerna kan
skrivas som linjär kombination
av de övriga.

Beweiside: Beroende $\implies$

$$\sum_{i=1}^s c_i \vec{v}_i = \vec{0} \quad \text{för något val}$$

av $c_1, c_2, \dots, c_s \in \mathbb{R}$ (ej alla noll!)

(Fush): Säs $c_i \neq 0$ Då är

$$c_1 \bar{v}_1 = \bar{0} - \sum_{i=2}^s c_i \bar{v}_i$$

$$\Rightarrow_{(c_1 \neq 0)} \bar{v}_1 = \sum_{i=2}^s \left(\frac{-c_i}{c_1} \right) \cdot \bar{v}_i \quad (**).$$

Men: (**) säger precis att

$\bar{v}_1$ ges av linj. komb. av de övriga vektorerna. $\square$

Sats: (3.4.7) $A\bar{x} = \bar{0}$ har

bara trivial lösning $(\Rightarrow)$

Kolumnerna i A är oberoende.

Bewis: Ö! ledtråd: med $A = [\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n]$

$$\text{och } \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{Så } \sim$$

$$A\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{a}_i.$$

Poäng: Sats låter oss avgöra om

$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_s \in \mathbb{R}^n$ är oberoende:

Bilda en $n \times s$ matris

$$A = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_s] \quad \text{och}$$

studera lösningen till $A\bar{x} = \bar{0}$.

$$\left[\begin{array}{l} A\bar{x} = \bar{0} : \text{bara trivial lösning} \\ \Rightarrow \text{vektorer oberoende} \\ A\bar{x} = \bar{0} \text{ har icke triv. lösning} \\ \Rightarrow \text{vektorer beroende} \end{array} \right]$$

(Gausa!).

Följsats: (3.4.8) : Om

$$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_s \in \mathbb{R}^n \quad \text{och} \quad s \geq n+1$$

Så är vektorerna beroende.

Följd: monstret växer!

(se sats 3.4.9.).

Följande är ekvivalenta:

c, A är invertierbar

↑ {g, A 's kolonner oberoende
h) A 's rader oberoende.
nya!

Kap 3.5 ($A\bar{x} = \bar{b}$ och lite
geometri.).

Sats (3.5.1) Antag att $A\bar{x} = \bar{b}$

är konsistent, och låt

$$W = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : A\bar{x} = \bar{0} \} \quad (\text{homog. lös- rum!})$$

D_c^p är

$$\{ \bar{x} : A\bar{x} = \bar{b} \} = \bar{x}_0 + W$$

för $\bar{x}_0$ godtycklig lösning till

$$A\bar{x} = \bar{b} \quad (\text{dvs } A\bar{x}_0 = \bar{b}).$$

Anm! Skriver $\bar{x} = \bar{x}_p + \bar{x}_h$,

... partikulär lösning.

dar $\bar{x}_p$ är partikulär lösning
(dvs $A\bar{x}_p = \bar{b}$) och $\bar{x}_h$ är
homogen lösning (dvs $A\bar{x}_h = \bar{0}$).

Beviside! Antag att $A\bar{x}_0 = \bar{b}$,
och att $\bar{w} \in W$. Då är "delmängd".

$$A(\bar{x}_0 + \bar{w}) = A\bar{x}_0 + A\bar{w} \\ = \bar{b} + \bar{0} = \bar{b} \quad \therefore \bar{x}_0 + W \subset \{\bar{x} : A\bar{x} = \bar{b}\}$$

Hur vet vi att vi fått med allt?

Låt $\bar{x}_1$ vara en annan lösning
(dvs $A\bar{x}_1 = \bar{b}$).

til $A\bar{x} = \bar{b}$. Då är

$$A(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) = A\bar{x}_1 - A\bar{x}_0 = \bar{b} - \bar{b} = \bar{0}$$

$$\therefore \bar{x}_1 - \bar{x}_0 \in W$$

$\therefore \bar{x}_1$ är i formen $\bar{x}_0 + W$.

$$\text{dvs } \{\bar{x} : A\bar{x} = \bar{b}\} \subset \bar{x}_0 + W$$

$$\therefore \{\bar{x} : A\bar{x} = \bar{b}\} = \bar{x}_0 + W \quad \square$$

Konsekvenser:

Sats 3.5.3: Låt A vara en $m \times n$ matris. Då är följande ekvivalenta:

a) $A\bar{x} = \bar{0}$ har bara trivial lösning.

b) $A\bar{x} = \bar{b}$ har som max en lösning.

(Dvs antingen inkonsistent, eller ingen lösning.)

Sats 3.5.4. Antag att $A\bar{x} = \bar{b}$ har strikt fler variabler än ekvationer. Då har

$A\bar{x} = \bar{b}$ antingen ingen lösning, eller oändligt många lösningar.

När har $A\bar{x} = \bar{b}$ en lösning?

Ansvar:

So: Om $A = [\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_n]$

och $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ så är

$$A\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{a}_i, \text{ där}$$

$A\bar{x} = \bar{b}$ har lösning $\Leftrightarrow$

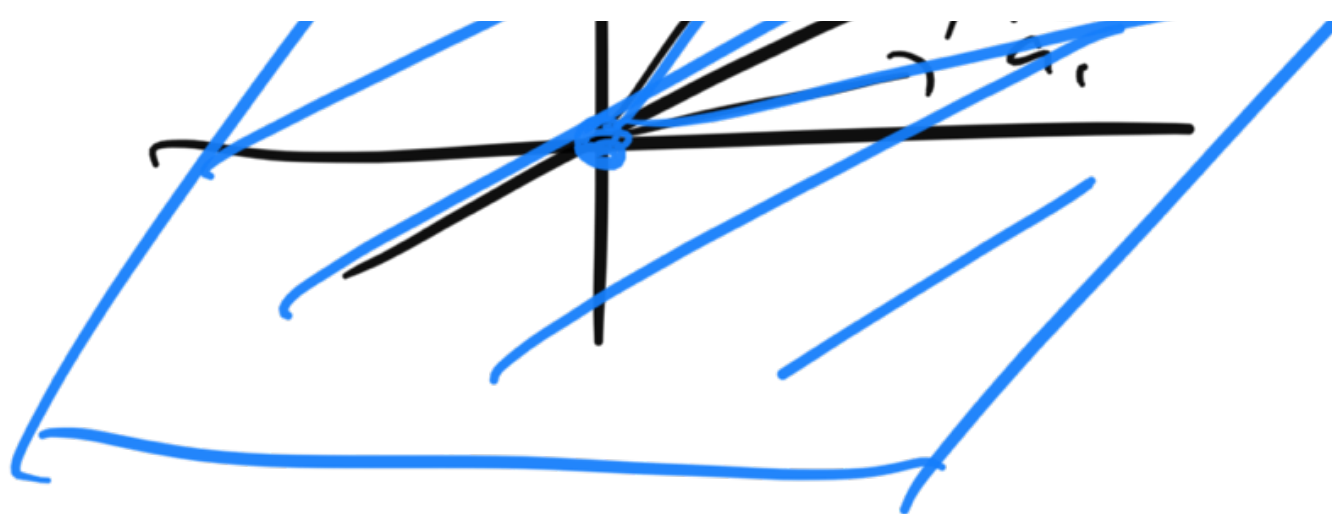
$$\sum_{i=1}^n x_i \bar{a}_i = \bar{b}, \text{ där } \bar{b}$$

ligger i A 's kolonnrum.

(Kolonnrum: alla linjärs-kombinationer av A 's kolonner.)

$$A = [\bar{a}_1 \bar{a}_2], \quad \bar{a}_1, \bar{a}_2 \in \mathbb{R}^3$$





Geometrisk tolkning till
 $A\bar{x} = \bar{0}$ & ortogonalitet:

Se slut av 2.5. (sid
 139-140.)

