

Matrisoperationer (3.2)

Sats (3.2.1, räkne regler för matriser): A, B, C är matriser, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Då gäller:

a) $A + B = B + A$

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$

c) $(ab) \cdot A = a \cdot (b \cdot A)$

d) - g) : se bok!

Sats (3.2.2 : räkne regler för matris multiplikation).

Anta: A, B, C matriser, och $a \in \mathbb{R}$.
Då gäller:

a) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

b) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

! } se bok!

$$f) a \cdot (B \cdot C) = (a \cdot B) \cdot C = B \cdot (a \cdot C)$$

Poäng: Kan (nästan) räkna som vanligt!

WARNING: ofta gäller att
 $A \cdot B \neq B \cdot A$

Def: Nollmatriser har "noll
 överallt".

Ex: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ etc.
 (2×2) (3×1) (1×2) (1×1)

Om $m \times n$ underförstådda: skriv

bara 0. (Tex: $m \times n = 2 \times 2$;
 Skriv 0 istf. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.)

Trevlig egenskap: $0 + A = A + 0 = A$.
 (om storleken kompatibel.)

Def: En $n \times n$ (kvadratisk!)

matris med 1-er på diagonalen

h. m. alla element ska vara

en identitetsmatrix. Vi skriver

I_n (eller bara I om n är underförstådd.)

Ex: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
etc.

Poäng: Om A är en $m \times n$ matrix så gäller:

$$\begin{cases} A \cdot I_n = A \\ I_m \cdot A = A \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}}_A = A$$

(Tänk: $I = I_n = 1$.)

Sats (S. 2.7): Låt A vara en $n \times n$ matris,
och låt R vara A "omgjord" till
reducerad trappform. Då har
 R antingen ^{minst} en rad med nollor
eller så är $R = I_n$
(~~Bar~~ "ledande ettor i varje
rad & kolonn".)

Beweis: Se beh! □

Matrisinvers:

Def: Låt A vara en $n \times n$ matris.
Om det finns en $n \times n$ matris B
så att $A \cdot B = B \cdot A = I_n (=I)$

Sägs A vara inverterbar.

(Om ej inverterbar sägs A vara
Singulär.)

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ är inverterbar,

tag $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Ö: Kolla att $AB = B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$.

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ är singular!

Vanor? Låt B vara en 3×3 matrix

$$\Rightarrow B \cdot A = \begin{bmatrix} B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} & B \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} & B \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$\nearrow$
 $B \cdot \vec{0} = \vec{0}$

$$= \begin{bmatrix} B \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} & B \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Oavsett vad B är. $\therefore B \cdot A$ är
aldrig identitetsmatrisen!

$\therefore A$ ~~är~~ ej inverterbar (singular).

Sats (3.2.6. unik invers!) Om B, C
är inverser till A så är $B = C$.

Beweis: B invers till $A \Rightarrow B \cdot A = I$

$$\Rightarrow (B \cdot A) \cdot C = I \cdot C = C$$

$$\Rightarrow B \cdot (A \cdot C) = C$$

$\overset{I}{\curvearrowright} \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad B \cdot I$

$$\Rightarrow B \cdot I = C \Rightarrow B = C.$$

(då $A \cdot C = I$.)

"Q.E.D." ^{V.S.V. vs. Ø.}
(bevis klart.) □

Anm: 2×2 fallet lätt:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{Så är } A \text{ inverterbar}$$

om $ad - bc \neq 0$, och inversen
ges av $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

Anm: Vi låter A^{-1} beteckna inversen
till A (om den existerar.).

Dvs: ~~har~~ har då:

$$A^{-1}A = A \cdot A^{-1} = I.$$

Sats: A, B inverterbara (d. samma
storlek)

$$\Rightarrow A \cdot B \text{ inverterbar.}$$

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Bevis: $(A \cdot B) (B^{-1} A^{-1}) = A \underbrace{(B B^{-1})}_{=I} A^{-1}$

$$= \underbrace{(A I)}_{=A \cdot A^{-1}} A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$$

P.S.S. (gär!) $(B^{-1} A^{-1}) (A \cdot B) = \dots = I.$

$\therefore AB$ är inverterbar, och inversen

ges av $B^{-1} A^{-1}$. □.

Anm: Kan skriva: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

OBS! : bytt plats på A, B !

Anm (fråga i chatt): KS100913, #2

gär att göra utan kryssprodukt.

(lös ekvationssystem.).

(Fråga i chatt!)

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 7 - 2 \cdot 3} \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Koll: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-6 & -2+2 \\ 21-21 & -6+7 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

.. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ö: Kolla att $\begin{bmatrix} -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Matris potenser : $A, A^2, A^3, A^{-1}, A^{-5}$ etc.

Ex: $A^2 = A \cdot A$ $A^{-2} = (A^{-1})^2$.

Se bok (sid 102-103), läs
även om $p(A)$ d^o p polynom
och A matris.

(Ex: $p(x) = x^2 + \textcircled{1} \Rightarrow p(A) = A^2 + I$)

*1 $\rightarrow$ I
2 $\rightarrow$ 2·I etc.*

Sats: (transponat egenskaper, 3.2.10)

a) $(A^T)^T = A$

b) - d) se bok!

e) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

(DBS!!).

för: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Sats (3.2.11) A inverterbar

$\Rightarrow A^T$ inverterbar.

Dessutom: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Beweis: se boh. $\square$.

Sats (3.2.12: mer om spår)

a) $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$.

b)-d): se boh.

e) $\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(B \cdot A)$. (!).

Något om skalärprodukt via transponat

Notera: $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ så kan vi

Skriva $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{u}^T \cdot \bar{v}$

Skal. prod. matris prod.

Ex: $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 3 + 8 = 11.$$

$$\bar{u}^T \bar{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = [1 \cdot 3 + 2 \cdot 4] = [11] = 11.$$

(1×1 matriser)
 $\longleftrightarrow \mathbb{R}$

Ö: Visa att $(A \cdot \bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot (A^T \bar{v})$

och: $\bar{u} \cdot (A \bar{v}) = (A^T \bar{u}) \cdot \bar{v}$.

(bedrägl: använd transponat trick).

Metod för att hitta A^{-1} (Kap 3.3).

Kort: gör så här: givet A , skriv

$$\begin{bmatrix} A & | & I \end{bmatrix} \sim \dots \sim \dots \sim$$

↑
massor med
radoperationer!

$$\sim \begin{bmatrix} I & | & X \end{bmatrix}$$

Di gäller att $X = A^{-1}$.

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ skriv:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1 & -1 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} r_1 - r_2 \\ r_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Koll: } A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

HURRA!

$$\text{Ö: Kolla } A^{-1} \cdot A = I.$$

Ann: Koncis notation for
equationssystem with matrixmult-
iplication: $A \bar{x} = \bar{b}.$

$$\text{Ex: } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Poöng: } \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{cases}$$

Samma Sak som $A \bar{x} = \bar{b}.$

Ö: Kolla!

Sats: Låt A vara $n \times n$ matris,
 $\vec{x}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Om A är
ohärd!
inverterbar så har $A\vec{x} = \vec{b}$

en unik lösning, som ges

av $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Koll: ger verkligen $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ en
lösning?

$$A \cdot \vec{x} = A \cdot (A^{-1}\vec{b}) = (A \cdot A^{-1}) \cdot \vec{b} = \\ = I \cdot \vec{b} = \vec{b}. \quad \text{Stämmer!}$$

Sats 3.3.6 (viktig): Låt A vara
en $n \times n$ matris. Då gäller:

$A\vec{x} = \vec{0}$ har bara trivial

lösning $\Leftrightarrow A$ är inverterbar.

Bevis: $\Leftarrow$: A är inverterbar

$$-1 \quad -1 \quad -1 \quad -1$$

$$\text{och } A\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \underbrace{A A}_{I} \bar{x} = A \bar{0} = \bar{0}$$

$$\Rightarrow I \cdot \bar{x} = \bar{0} \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}.$$

Dus : $\bar{x}$ måste vara trivial lösning!

$\Rightarrow$: se bok. $\square$.

Sats (3.3.8) Låt A, B vara $n \times n$ matriser.

a) Om $A \cdot B = I$ eller $B \cdot A = I$
 så är både A & B inverterbara,
 och A, B är varandras
 inverser. ("röcker med

invers från vänster eller höger
 $\Rightarrow$ invers från båda hållen. $\})$

b) Om $A \cdot B$ är inverterbar
 så är både A och B ~~inverte~~
 inverterbara.

Sats ("monstersatsen, det 1", 3.3.9.).

Låt A vara en $n \times n$ matris.

De är följande ekvivalenta:

- g) Den reducerade trappformen av A är I_n
- (b) A kan skrivas som en produkt av elementära matriser
 $\Leftrightarrow$ vi gör elementära radoperationer
- c) A är inverterbar.
- d) $A\bar{x} = \bar{0}$ bara har trivial lösning.
- e) $A\bar{x} = \bar{b}$ är konsistent $\forall \bar{b} \in \mathbb{R}^n$.
(lösning existerar).
- f) $A\bar{x} = \bar{b}$ har exakt en lösning
 $\forall \bar{b} \in \mathbb{R}^n$.