

SF1624, FS (Matriser, 3.1)

En $m \times n$ matris har m rader
och n kolonner.

Ex: ~~2~~ 2×3 : $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

3×2 : $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, 2×2 : $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$

3×1 : $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ (kolonnektör!)

1×3 : $[7 \ 8 \ 9]$ (radvektor!)

1×1 : $[9]$ (eller bara 9).

Indexkonvention: A är en $m \times n$
matris:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dus a_{ij} är talet på
rad i & kolonn j .

Ann: Konvention: ibland skriver
vi bara $A = [a_{ij}]$.

Def: Om $m=n$ sägs A vara
Kvadratisk. Ex: $[1]$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ etc.}$$

Def: Två $m \times n$ matriser A, B
är lika om $A = \begin{matrix} \uparrow \\ m \\ \downarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$
 $\leftarrow \dots \rightarrow$
 n

$$(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

OCH $a_{ij} = b_{ij}$ för alla i, j .

(Om A, B har olika storlek
 $\Rightarrow$ automatiskt olika).

Def: Om A, B båda är
 $m \times n$ matriser definierar vi
summan $C = A + B$ genom
att låta C vara en $m \times n$
matris, $C = [c_{ij}]$ och
 $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. $\left(\begin{array}{l} A = [a_{ij}] \\ B = [b_{ij}] \end{array} \right)$

Ex: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+1 \\ 3+1 & 4+0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Def: Givet

matris $A = [a_{ij}]$ och $c \in \mathbb{R}$
definierar vi produkten av c med A
som $B = c \cdot A$ genom

$$b_{ij} = c \cdot a_{ij}.$$

Ex: $3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

Def: Vi definierar $-A$ som

$(-1) \cdot A$, och $A - B$ som

$$A + (-1) \cdot B. \quad \text{"} \quad (-1) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) \cdot 2 & (-1) \cdot 3 \\ (-1) \cdot (-4) & (-1) \cdot 5 \end{bmatrix}$$

Ex: $-\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}.$

Ex: $\begin{matrix} A & - & B \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & - & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-0 \\ 3-0 & 4-(-1) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Bättre (!?) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Två sätt att betrakta A :
via radvektorer eller kolonn-
vektorer.

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *indikerar att $\bar{c}_i$ gör upp/här*

$$A = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 & \bar{c}_2 \\ | & | \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad A = \begin{bmatrix} - & \bar{r}_1 & - \\ - & \bar{r}_2 & - \end{bmatrix}$$

*välj
vänst/hög*

där $\bar{c}_1, \bar{c}_2$ är kolonnvektorer i A
och $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ är radvektorer i A ,

Nämligen: $\bar{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \bar{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{r}_1 = [1 \ 2], \bar{r}_2 = [3 \ 4].$$

Def: Låt A vara en $m \times n$

matrix, och x en $n \times 1$ matrix
(eller bara kolonvektor; $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$)

Vi definierar $A \cdot \bar{x}$ så här:

Skriv $A = [\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \dots \ \bar{a}_n]$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
 $\uparrow$ kolonner i A

och definiera sedan $A \cdot \bar{x}$ som:

$$A \cdot \bar{x} = x_1 \cdot \bar{a}_1 + x_2 \cdot \bar{a}_2 + \dots + x_n \cdot \bar{a}_n$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \bar{a}_i$$

(linj. kombination).

Ex: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 7 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 43 \end{bmatrix}.$$

Q: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \overset{3}{\underset{2}{\neq}}$

$$3 \neq 2$$

ERROR

$$\underline{\text{Ex:}} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 7 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 14 \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \\ 43 \end{bmatrix}.$$

Sats (3.15; räkne regler). Antag
att A är en $m \times n$ matris,
 $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$, och $c \in \mathbb{R}$. Då gäller

a) $A \cdot (c \cdot \bar{u}) = c \cdot (A \cdot \bar{u})$

b) $A \cdot (\bar{u} + \bar{v}) = A \cdot \bar{u} + A \cdot \bar{v}$
 $\Rightarrow A(\sum_i \bar{v}_i) = \sum_i A\bar{v}_i$

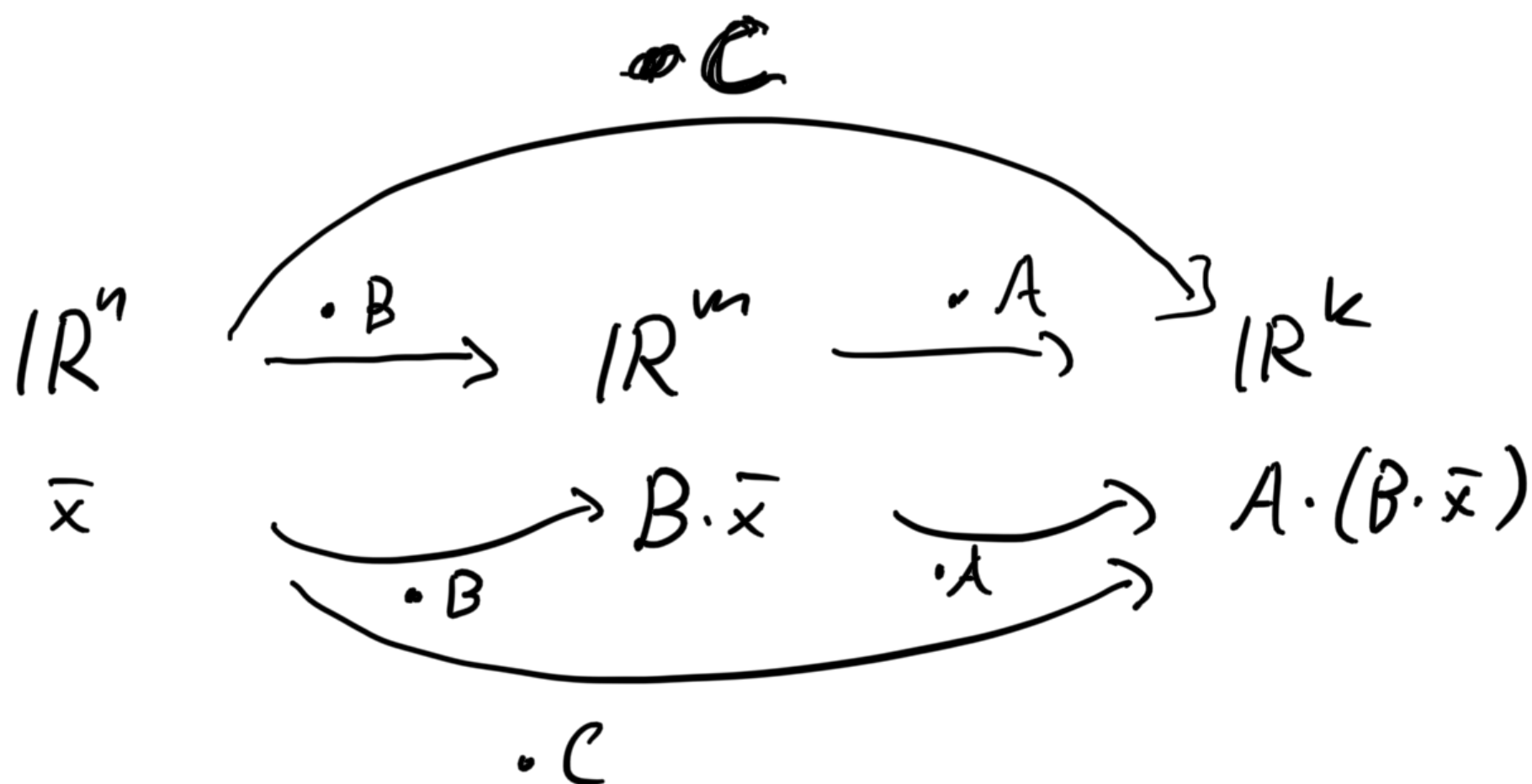
Kort: Avbildningen $\bar{v} \rightarrow A \cdot \bar{v}$
är linjär.

Beris: Ö försök själv! (Fast?
Kolla boken.)

Matris produkt: Givet matriser

A, B vill vi bilda matris-
produkten $C = A \cdot B$.

(Varning: funkar bara om storlek
på A & B är "kompatibla".)



Vi måste ha: $B: m \times n$
 $A: k \times m$
 $C: k \times n$.

Viktigt: matrisprodukt "kommer i facen"

Sammanställning.

Notera: Om $A = [\bar{a}_i]$, $B = [\bar{b}_i]$

↑
kolonnvektorer

och $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ för vi:

$$B \cdot \bar{x} = [\bar{b}_1 \ \bar{b}_2 \ \dots \ \bar{b}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \bar{b}_1 + x_2 \bar{b}_2 + \dots + x_n \bar{b}_n = \sum_{i=1}^n x_i \bar{b}_i$$

$$\text{och } A \cdot (B \cdot \bar{x}) = A \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i \bar{b}_i \right) = \text{[räkna - regler!]}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \cdot (A \cdot \bar{b}_i)$$

skalärer

$\therefore$ Om vi låter $C = [A\bar{b}_1 \quad A\bar{b}_2 \dots A\bar{b}_n]$

ser vi att

$$C \cdot \bar{x} = [A\bar{b}_1 \quad A\bar{b}_2 \dots A\bar{b}_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} =$$

$$= x_1(A\bar{b}_1) + x_2(A\bar{b}_2) + \dots + x_n(A\bar{b}_n)$$

Hurra! C svarar alltså mot
Sammanställningen

$$\bar{x} \longrightarrow B \cdot \bar{x} \longrightarrow A \cdot (B \cdot \bar{x})$$

$x \longrightarrow C \cdot \bar{x}$

Poäng: vi definierar $A \cdot B$

som matrisen $[A\bar{b}_1 \quad A\bar{b}_2 \dots A\bar{b}_n]$

(och detta svarar mot Sammanställning!)

Ex:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = C, C = ?$$

$\downarrow A$ $\downarrow B$

$\bar{b}_1$ $\bar{b}_1$ $\bar{b}_2$

Räkne ut: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\therefore A \cdot B = [A\bar{b}_1 \quad A\bar{b}_2] = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad (*)$

Ö: Finns $B \cdot A$.

Ö: Är $A \cdot B = B \cdot A$?

$$\begin{array}{ccc} \leftarrow & \updownarrow & \\ A & B & A \cdot B \end{array}$$

kolonner i A =
rader i B .

Anm: $B = [\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n] \Rightarrow AB = [A\bar{b}_1 \dots A\bar{b}_n]$

$\therefore$ Kolonn j i AB ges av $A \cdot \bar{b}_j$
↑
kolonn j B

Dessutom: om $\bar{b}_i = \begin{bmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix} \quad \text{Ser } v1 \text{ alt}$$

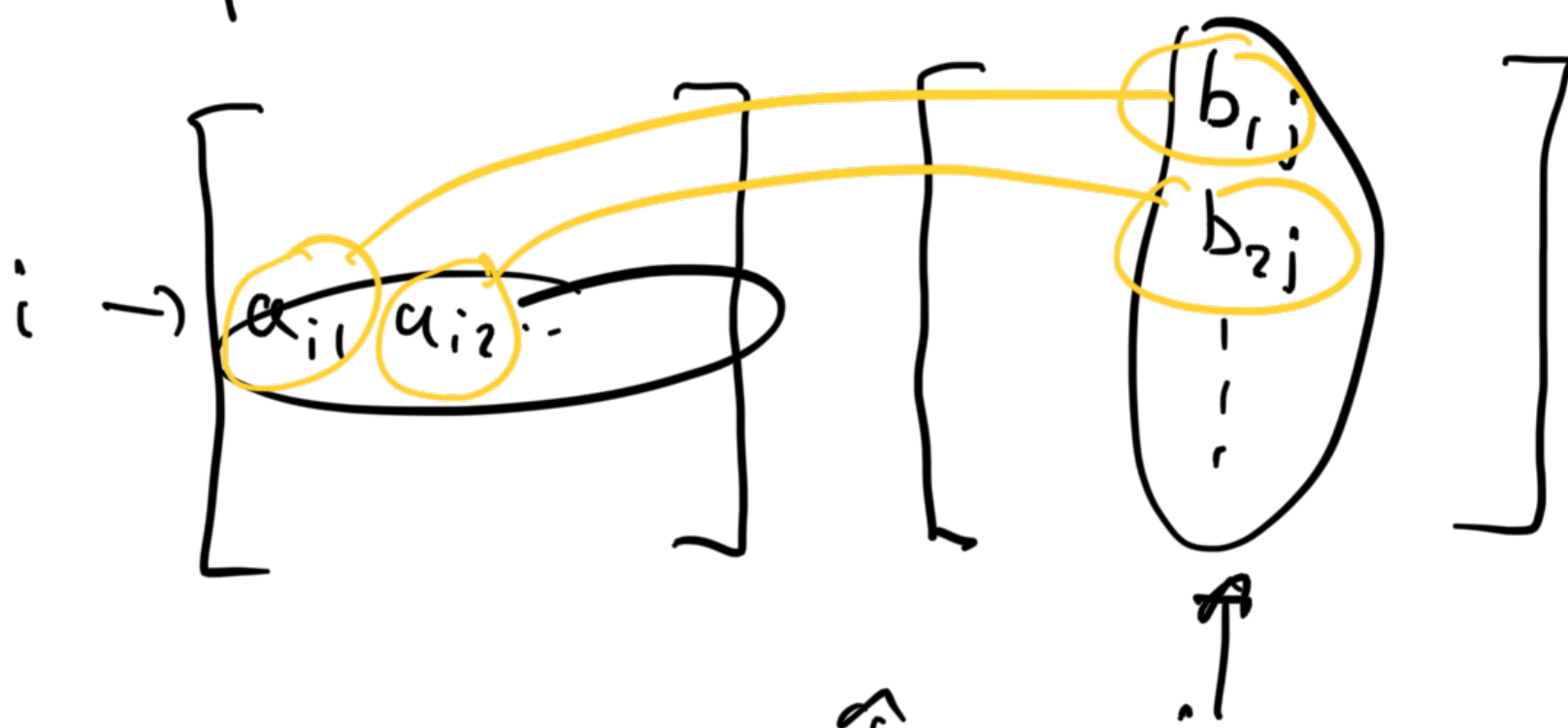
$$A \cdot \bar{b}_j = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m] \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{l=1}^m b_{lj} \cdot \bar{a}_l = b_{1j} \cdot \bar{a}_1 + b_{2j} \cdot \bar{a}_2 + \dots + b_{mj} \cdot \bar{a}_m$$

$$= b_{1j} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{bmatrix} + b_{2j} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{bmatrix} + \dots + b_{mj} \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{km} \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A \cdot B)_{ij} \quad \text{ges an: } \sum_{l=1}^m b_{lj} \cdot a_{il}$$

rad i ,
kolonn j
i produkt $A \cdot B$





Annot & sett att se $A \cdot B$.

$$\text{Om } A = \begin{bmatrix} \dots & \bar{r}_1 & \dots \\ \dots & \bar{r}_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \bar{r}_n & \dots \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{c}_1 & \dots & \bar{c}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

ser vi att $(A \cdot B)_{ij} = \bar{r}_i \cdot \bar{c}_j$

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$(AB)_{22} = [0 \ 3] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 3$$

$$(AB)_{12} = [1 \ 2] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4$$

Ö: Jfr med (*)! $A \cdot B = \begin{bmatrix} ? & 4 \\ ? & 3 \end{bmatrix}$

Ger oss "genväg" för

matris multiplikation:

$$A \cdot B$$



[]]) ↓)

$$\begin{bmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} \\ \underline{2} & \underline{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{1} & \underline{2} \\ \underline{3} & \underline{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \\ \underline{2 \cdot 1 + 1 \cdot 3} & \underline{2 \cdot 2 + 1 \cdot 5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Sats 3.1.8 : läs själva!

• Transponat: Givet $m \times n$ matrix $A = [a_{ij}]$, definierar vi transponerat A^t , som $n \times m$ matrisen $A^t = [a_{ji}]$. ("Byt rader mot kolonner")

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Def: Givet kvadratisk matrix (säg $n \times n$) definierar vi

Spåret ("trace") sum

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad . \quad ($$

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Diagram annotations:
- A green diagonal line connects the elements 1, 5, and 9.
- An arrow points from the label a_{11} to the element 1.
- An arrow points from the label a_{13} to the element 3.
- A bracket on the right side of the matrix is labeled $a_{11} + a_{22} + a_{33}$.

$$\Rightarrow \text{tr}(A) = 1 + 5 + 9 = 15.$$

Läs själv om matris inverse & yttre produkt. (Slut kap 3.1).

Invers: A^{-1}

Även: Transponerat: A^t, A^T