

SF1624, F4 (elev. syst.,
forts.)

Varför och att göra "radoperationer"?

← "question" = fråga för en

Q: Har följande ekvationer
samma lösningar?

$$(3a) \quad x + y = 1$$

$$(3b) \quad 2x + 2y = 2$$

Teång: multiplikation av
nollskild skalär ändrar ej
lösningar!

$$(4a) \quad \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 19 \end{cases}$$

$$(4b) \quad \begin{cases} x - y = 19 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Q: Samma lösningar? Ja!

Poäng: byta plats på vaden
ändrar ej lösningen

$$(5a) \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 5x + 6y = 2 \end{cases}$$

$$(5b) \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 5x + 2x + 6y + 2y = 2 + 2 \cdot 1 \end{cases}$$

(rad₂: tills
för 2gg -
rad₁, till
rad₂)

ders:

$$(5b) \begin{cases} x + y = 1 \\ 7x + 8y = 4 \end{cases}$$

Poäng: att lägga till multipl
av rad till annan rad
ändrar ej lösningen!

Anm: Att $(5a) \Rightarrow (5b)$ rätt enkelt.
Att $(5b) \Rightarrow (5a)$ kanske lite
mindre enkelt (meditera!)

Poäng: ovanstående elementära
radoperationer ändrar ej lösnings-
mängden!

Poäng #2: Med radoperationer
kan vi förenkla systemet
så att lösning blir "uppenbar".

Δx

Komplicerat!!!

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ y + z = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

"på trapp form"

Ser lätt: $z = 1$

Även att: $y = 3 - z = 3 - 1 = 2$

Ganska lätt: $x = 7 - y - z =$
 $= 7 - 2 - 1 = 4$

(gör: "bakåt substitution").

"Bokförings trick": nödvändigt att
 skriva ut $x, y, (z, w \text{ etc})$
 Nej!

Ex (med x, y):

$$x + y + z = 1$$

$$\begin{cases} \underline{2}x + \underline{2}y = \underline{1} \\ \underline{2}x + \underline{5}y = \underline{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 & (r_1) \\ 0x + 3y = 2 & (r_2) - (r_1) \end{cases}$$

Ex (utan x, y)

$$\left(\begin{array}{cc|c} x & y & HL \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{array} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} x & y & HL \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} r_1 \\ r_2 - r_1 \end{array}$$

Anni: bland/otta: bara $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

dvs: inget x, y, HL ovanför,
och inget "stretch stretch".

"augmented matrix".
(last fill HL.).

Slutkläm: räkningar om
vi gör detta blir mindre
rörliga! (När du vant dig!).

Gauss-Jordan (2.2) : mer om
att förenkla mha redoperationer.

Ex: "reducerad trappform":

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & z & HL & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Se direkt att det finns

exakt en lösning, nämligen

$$x=1, y=2, z=3.$$

Anm: Att göra om till reducerad
trappform ganska mycket extra
jobb - räcker med "trappform".

Ex: ("trappform")

	x	y	z	HL
1	1	1	1	3
0	0	1	1	2
0	0	0	1	1

gör ej när du är van!

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

"Gå baklänges" (bakåtsubstitution):

rad 3 $\Rightarrow z = 1$ (Lobba)

rad 2 $\Rightarrow y = 2 - z = 2 - 1 = 1$ (börja med guld!)

rad 1 $\Rightarrow x = 3 - y - z = 3 - 1 - 1 = 1$

Ibland/ofta: skriver man lösningen
ger an $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Det (trappform):

① Om en rad inte bara innehåller
nollor, så är första ^{nollskilda} elementet
en ett. ("Ledande etta").

② Eventuella rader med bara
nollor = löst system.

③ När vi gör neråt bland
de nollskilda raderna hammar
de ledande ettorna längre &
längre till höger.

Det: (reducerad trappform):

Uppfyller 1-3 Sant

④ Nollskilda kolonner innehåller bara en etta
(resten nollor!)

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$$

↓

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{bmatrix} \right.$$

$$0 = 0x + 0y + 0z = 3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2-1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

↑ möjligt att få ett i kolonnen
 #1 om alla element i första
 kolonnen lika med noll.

3 olika typer av lösningen:

ingen lösning, precis en,
 eller oändligt många.

Fall 1: Ingen lösning. Efter reduktion
 till trappform (eller reducerad
 trappform):

det finns en rad:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & \neq 0 \end{array} \right]$$

$\nearrow$
 nollor!
 x y z ... HL

$$\underline{\text{Ex:}} \quad 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 5 \\ \Rightarrow \text{ingen løsning!}$$

$$\underline{\text{Ex:}} \quad \begin{array}{cccc|c} x & y & z & & \text{HL} \\ 1 & 2 & 3 & & 4 \\ 0 & 0 & 0 & & 5 \end{array} \rightarrow 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 5$$

Om⁴öjligt!
ingen løsning!

Fall 2: precis en lösning:

lika många ledande etter
som antal variabler.

$$\underline{\text{Ex:}} \quad \begin{array}{cccc|c} x & y & z & w & \text{HL} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}$$

ledande
etter

Antal obkända:

x, y, z, w dvs 4.

Precis

Antal ledande ror: 1. u lösning:

$$w = 8, \quad z = 7 - 3w = 7 - 3 \cdot 8 = -17$$

etc etc.

Fall 3: oändligt med lösningar

Ex:

x	y	z	Hv
1	1	2	1
0	0	1	2

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad x + y + 2z &= 1 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

För rad 2 $\Rightarrow z = 2$.

Rad 1: $x + y = 1 - 2z = -3$.

$\therefore y$ kan vara vad som helst!

Skriv: $y = s$, där $s \in \mathbb{R}$.

och får sedan: $x = 1 - y - 2z$

$$= 1 - s - 4 = -s - 3.$$

$\therefore$ Lösningen ges av:

$$x = -3 - s, \quad y = s, \quad z = 2$$

$$s \in \mathbb{R}.$$

Ex

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$x + y + 2z = 1$$

$$z = s, \quad y = t,$$

~~$$x = 1 - y - 2z$$~~

$$x = 1 - y - 2z$$

$$= 1 - t - 2s.$$

Ibland: Skriv ~~ex.~~ ex. ovan

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 - s \\ s \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vi kan ge lösning som

linjär-kombination av

vektorer

$$1 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ans: linjelösning. ($\in \mathbb{R}^3$)

lösningar ligger på linjen

$$\vec{x}_0 + s \cdot \vec{v} \quad \underbrace{s \in \mathbb{R}} \quad \text{där}$$

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ex: (tre parametern):

$$\begin{array}{l} 0 \neq r_1 \\ 0 = r_2 \\ 0 = r_3 \end{array} \begin{array}{c} x \quad y \quad z \quad \text{HL} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \Leftrightarrow x - 5y + z = 4$$

$$\begin{array}{l} n = 3 \\ r = 1 \\ \text{börde ha } n - r = 3 - 1 \\ = 2 \text{ fria} \\ \text{variabler.} \end{array}$$

z : "vad som helst": Säg $z = t, t \in \mathbb{R}$.

y : $\text{---} | \text{---} : s \in \mathbb{R} \quad y = s, s \in \mathbb{R}$.

x : bestämd av y, z :

$$x = 4 + 5y - z = 4 + 5s - t.$$

$\therefore$ Lösning ges ~~av~~ av:

$$x = 4 + 5s - t, \quad y = s, \quad z = t$$

där $s, t \in \mathbb{R}$ (godtyckliga)?

Ö: geometriskt objekt? Plan:
→ vilket plan?

Anm: y, z sägs vara fria
variabler.

Def: Om alla HL lika med
noll sägs systemet vara
homogent. (Annars sägs det
vara inhomogent.).

Sats 2.2.2 (dimensionssats för
homogena system)

Betrakta ett homogent system
med n ohända variabler.

Om systemet kan lösas om

till system på reducerad
 trappform med r nollskilda
 rader, så har systemet
 $n - r$ fria variabler.

Följsats (2.2.2): Ett homogent
 luv. system, med strikt fler
 okända än antal ekvationer,
 har oändligt många lösningar.

Ex (följd):

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 5z = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} r_1 - r_2 \\ r_2 \end{array}$$

~~okända~~ okända: ~~3~~ 3

antal ekvationer: 2

$$3 > 2$$

\\

15th $\sim$
fanns oändligt många lösningar!

Ö: lös explicit (dvs

$$z = \dots, \quad y = \dots?$$

$$x = \dots?$$

och dubbelkolla att blir
oändligt många lösningar!

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 1$$

ingen lösning!

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \dots + 0 \cdot x_{\infty} = 55$$

0¹