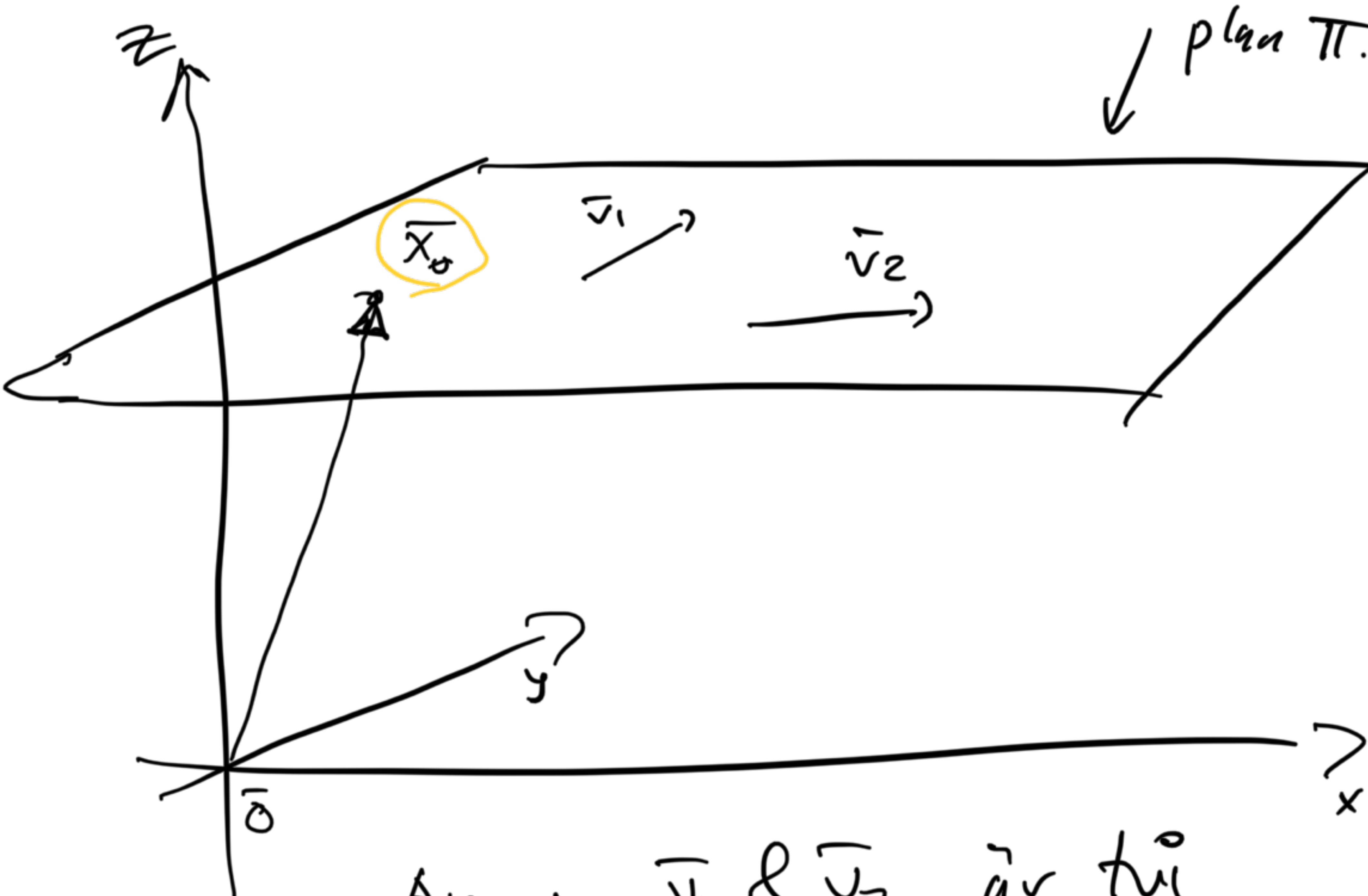
# SF1624, #3

## Plan på vektor & parameterform



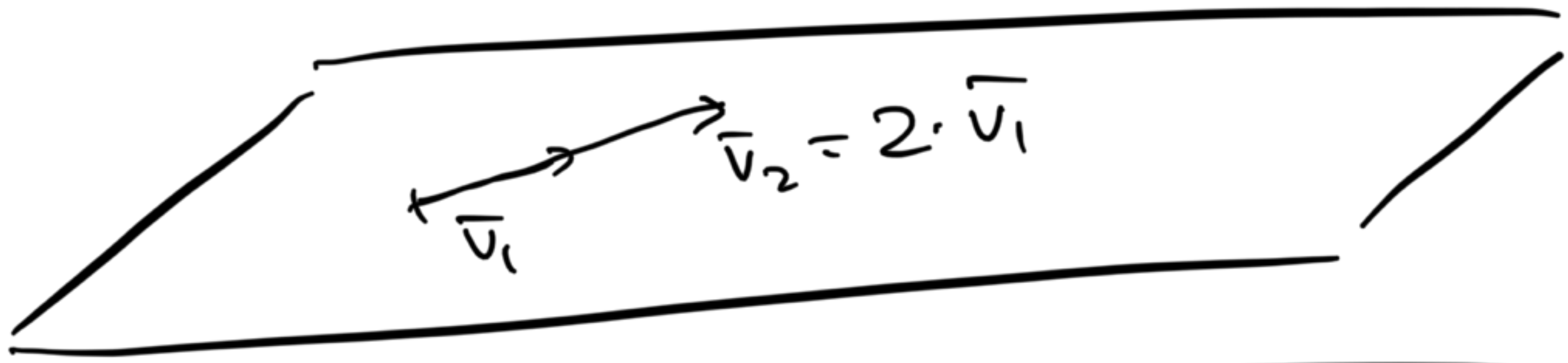

<u>Anm:</u> $\bar{v}_1$ & $\bar{v}_2$ är två vektorer parallella med $\Pi$.

<u>och</u>: $\bar{x}_0 \in \Pi$. OBS: $\bar{v}_1$ & $\bar{v}_2$ får <u>ej</u> vara multipler av varandra!

Poäng: då kan godtycklig punkt $\bar{x} \in \Pi$ skrivas som $\bar{x} = \bar{x}_0 + t_1\bar{v}_1 + t_2\bar{v}_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

vektorform för $\pi$.

Vill undvika: (t.ex.) $\bar{v}_1 = 2\cdot \bar{v}_2$




Anm: alla sådana $\bar{x}$ bildar tillsammans planet $\pi$.

Vektorform: $\bar{X} = \bar{x}_0 + t_1\cdot\bar{v}_1 + t_2\cdot\bar{v}_2$.

Parameterform: om $\bar{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och $\bar{x} = (x, y, z)$, $\bar{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\bar{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ så får vi:

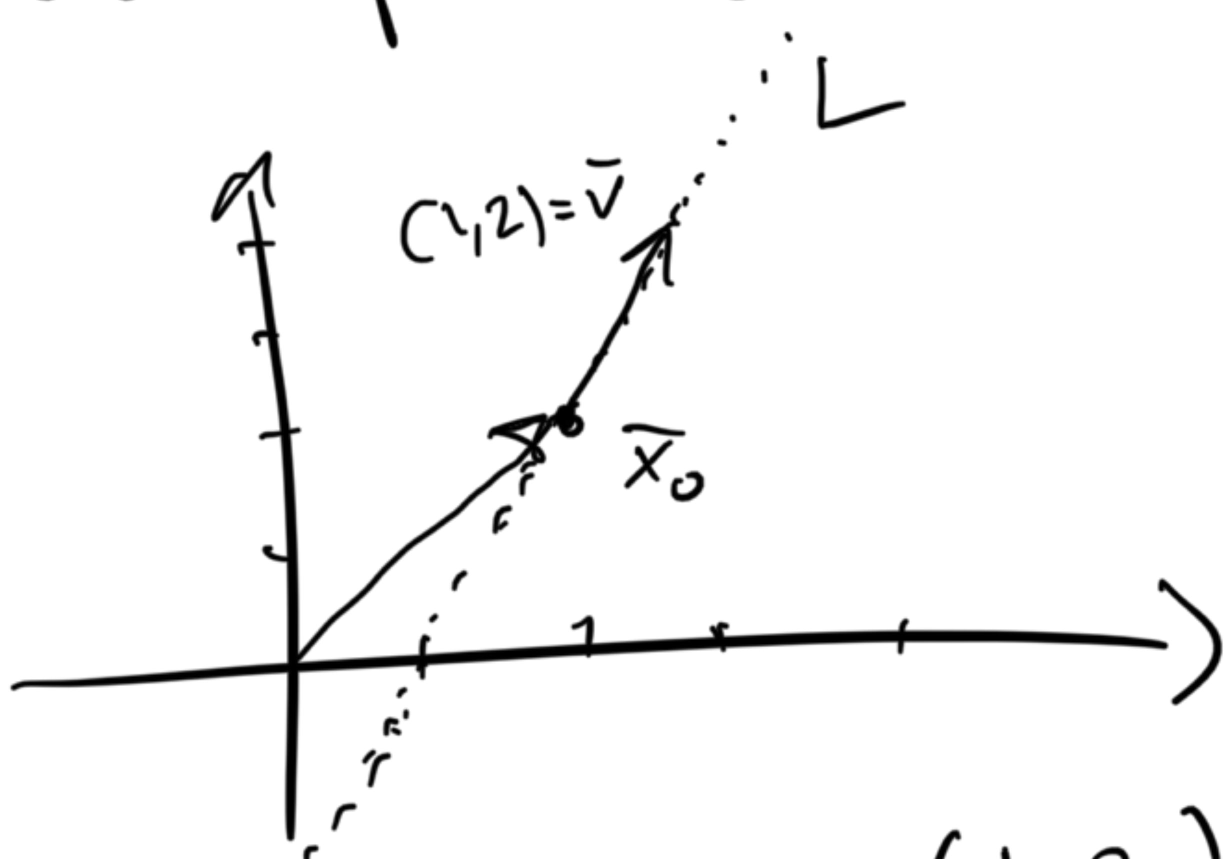
$$\underbrace{(x, y, z)}_{=\bar{x}} = \underbrace{(x_0, y_0, z_0)}_{=\bar{x}_0} + t_1\underbrace{(a_1, b_1, c_1)}_{=\bar{v}_1} + t_2\underbrace{(a_2, b_2, c_2)}_{=\bar{v}_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + t_1 a_1 + t_2 a_2 \\ y = y_0 + t_1 b_1 + t_2 b_2 \\ z = z_0 + t_1 c_1 + t_2 c_2 \end{cases}$$

↗ plan på parameterform!

<u>Anm:</u> Kan definiera linjer/plan i $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, se def 1.3.1 (i bok.)

<u>Ex:</u> Finn vektorform för linje $L$ som går genom $\bar{x}_0 = (2,2)$ och parallell med $(1,2)$




Vi kan ta $\bar{v} = (1,2)$

Lösn. $\bar{x} = \bar{x}_0 + t \cdot \bar{v} =$

(*) $= (2,2) + t \cdot (1,2), \quad t \in \mathbb{R}.$

<u>Ex:</u> Parameterform? (För ovanst. linje)

(*) ger direkt (med $\bar{x} = (x,y)$)

att
$$\begin{cases} x = 2 + t \cdot 1 \\ y = 2 + t \cdot 2 \end{cases}$$

Ex: ~~Ett Skalärekvation~~

$\bar{x} = \bar{x}_0 + t \cdot \bar{v}$

$(x, y) = (2,2) + t \cdot (1,2)$

$\Longrightarrow$

$(x, y) = (2,2) + (t \cdot 1, t \cdot 2)$

$= (2 + t \cdot 1, 2 + t \cdot 2)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 2 + t \cdot 1 \\ y = 2 + t \cdot 2 \end{cases}$$

---

Skalärekvationsform för linjen?

Dvs, finn $A, B, C$ så att $L$

ges av $Ax + By = C$,

då $x = 2 + t$, $y = 2 + 2t$.

$[\forall t]$

Dvs: $A(2+t) + B(2+2t) = C$

VL måste vara konstant, "slå ihjäl" $t$-termer.

Tag: $A = 2$ , $B = -1$

$( \ 2t + (-1)\cdot 2t = 0 \cdot t \ )$

Insättning av $\bar{x}_0 = (2,2)$ ger

$A \cdot 2 + B \cdot 2 = C$

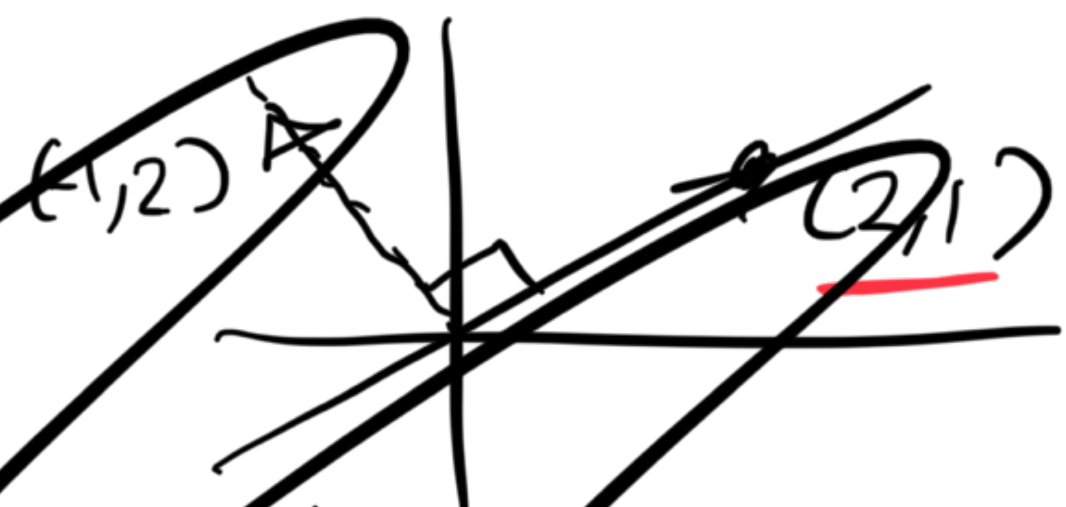
$\Rightarrow \ 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 = C$

dvs $C = 2$.

Svar: $2x + (-1)y = 2$.

---

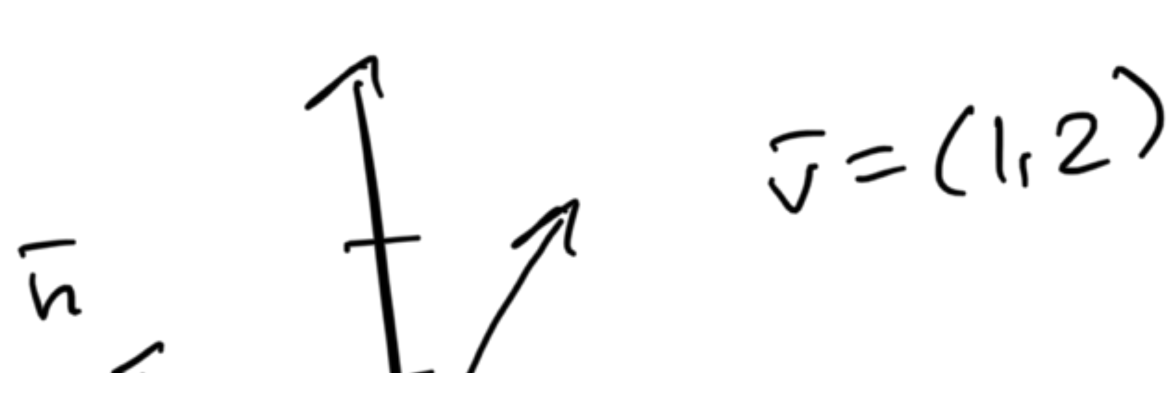
Alt. lösning: $\bar{v} = (1,2)$ parallell med linjen; hur hitta vinkelrät normalvektor $\bar{n}$? (Dvs $\bar{n} \perp \bar{v}$ eller $\bar{n} \cdot \bar{v} = 0$).

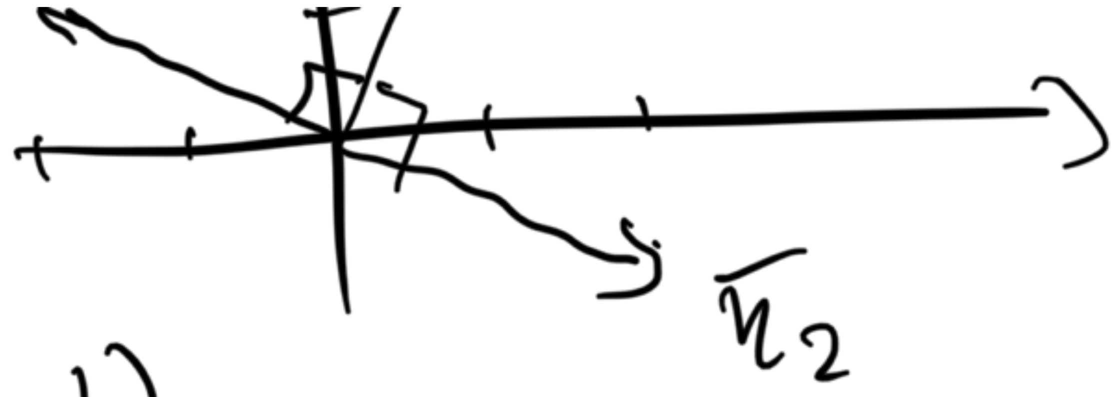



Tag $\bar{n} = (-1,2)$

Koll: $\bar{n} \cdot \bar{v} = (-1,2) \cdot (2,1) =$

$= \cancel{2 \cdot 1} + (-1)\cdot 2 + 2 \cdot 1 = -2+2 = 0$.






$\bar{n} = (-2, 1)$

Koll: $\bar{v} \cdot \bar{n} = (1,2)\cdot(-2,1)$

$= 1\cdot(-2) + 2\cdot 1 = -2 + 2 = 0.$

$\Rightarrow \quad A = -2, \quad B = 1$

(ty: $Ax + By = C$

har $(A, B)$ som normalvektor.)

---

Agh! Tag $\bar{n} = (2, -1)$

$\Rightarrow \quad A = 2, \quad B = -1.$

---

$2x - y = 2$

mult. med $(-1)$:

$(-2)\cdot x + y = -2.$

---

Observera: $x + y = 1$

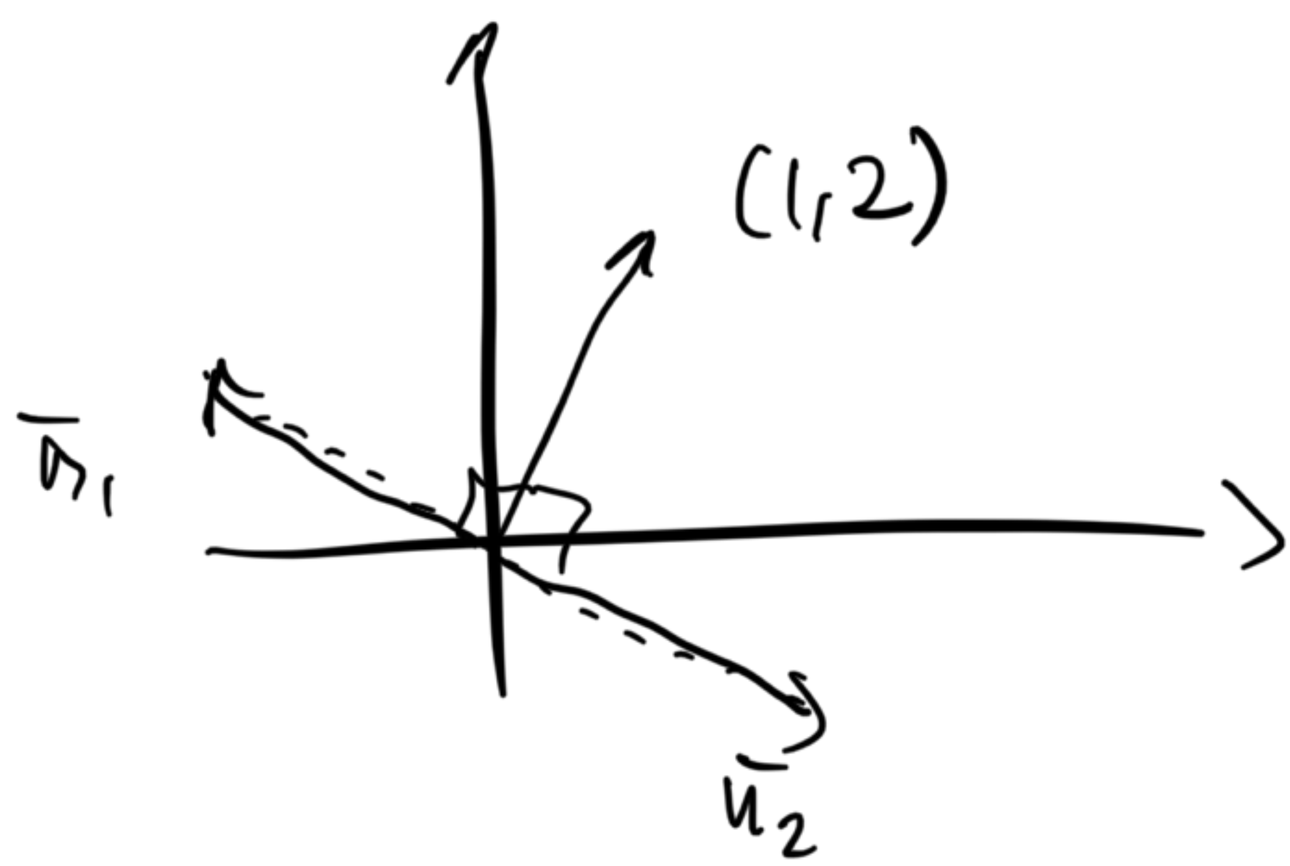
och $\quad -x - y = -1$

ger samma linje!!

---

givet $\bar{v}$, hur hitta $\bar{n}$

så att $\bar{v} \cdot \bar{n} = 0$ ?




$\bar{n}_1 = (-2, 1) \longrightarrow A = -2, B = 1$

$\bar{n}_2 = (2, -1) \longrightarrow A = 2, B = -1$

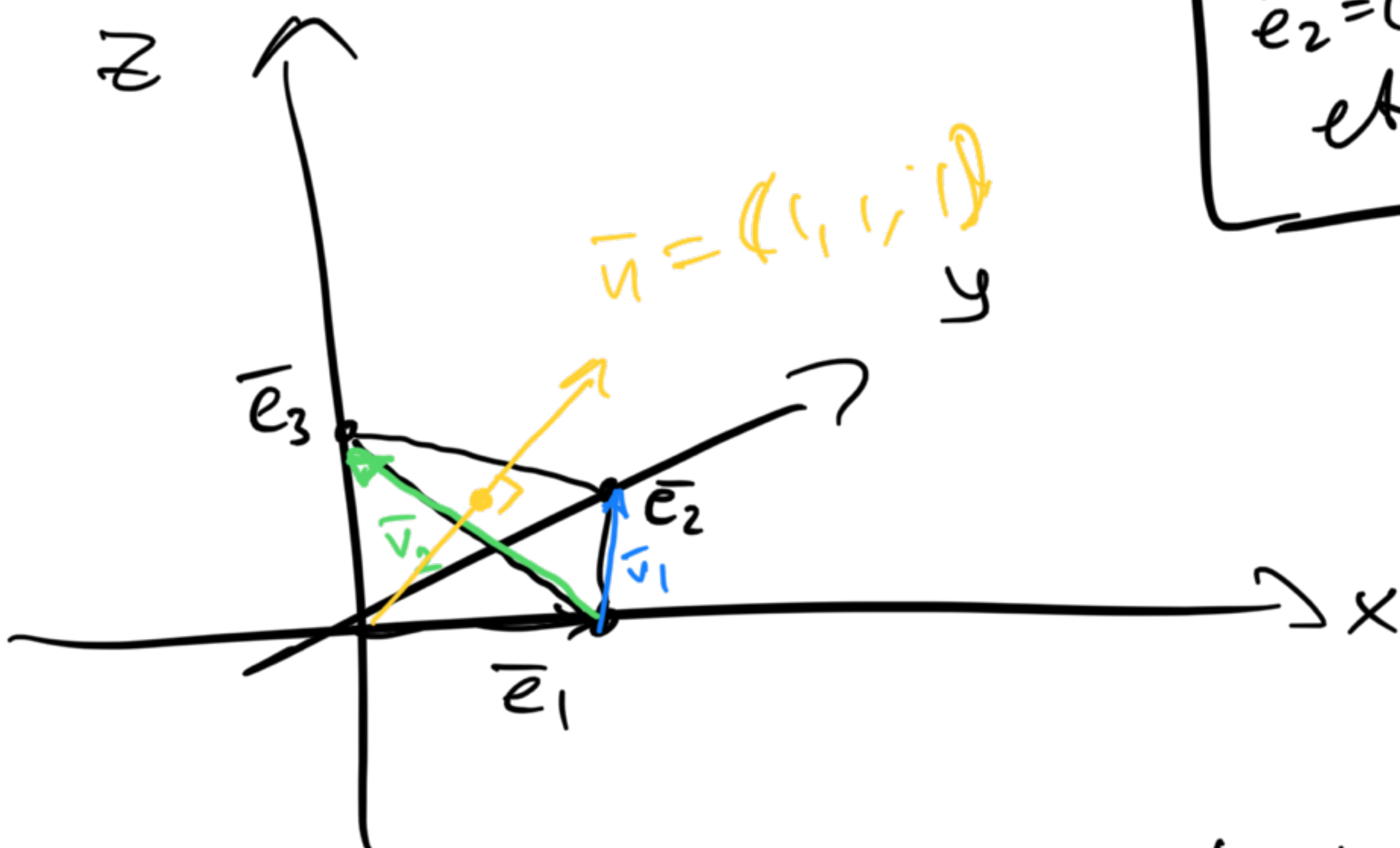
Ö (vasst): vad får vi för c-värden?
(Bör vara olika!)

---

Ex: Finn vektorform för ett plan $\Pi$ som innehåller

punkterna som ges av enhets-
vektorerna $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\bar{e}_1 = (1,0,0)\\ \bar{e}_2 = (0,1,0)\\ \text{etc}\end{array}}$$




Tag $\bar{v}_1 = \bar{e}_2 - \bar{e}_1 = (0,1,0) - (1,0,0) = (-1,1,0)$

$\bar{v}_2 = \bar{e}_3 - \bar{e}_1 = (-1,0,1)$

och (tex) $\bar{x}_0 = \bar{e}_1 = (1,0,0)$

Vektorformen för $\pi$ är

$$\bar{x} = (x,y,z) = \bar{x}_0 + t_1\bar{v}_1 + t_2\bar{v}_2$$

$$= (1,0,0) + t_1\cdot(-1,1,0) + t_2(-1,0,1)$$

$(t_1, t_2 \in \mathbb{R})$.

Parameterform:

$$\begin{cases} x = 1 + (-1)t_1 + (-1)t_2 = 1 - t_1 - t_2 \\ y = t_1 \\ z = t_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - t_1 - t_2 \\ y = t_1 \\ z = t_2 \end{cases}$$

Anm: Skalärekvation för planet?
(Dvs: $Ax + By + Cz = D$.)

Ej riktigt svårt:

Poäng: $(A, B, C)$ skall vara normalvektor till $\pi$.

(1) ("fusk"): "uppenbart" att $\bar{n} = (1, 1, 1)$ är normalvektor.

(2) Givet $\bar{v}_1$ & $\bar{v}_2$, hur hitta $\bar{n}$ så att $\bar{n}$ vinkelrät mot båda? Dvs $\bar{n} \cdot \bar{v}_1 = 0 = \bar{n} \cdot \bar{v}_2$.
Hur då? Lös ekv. system!

(Senare: tag $n = v_1 \times v_2$
$\uparrow$
kryss-produkt.)

~~Ekt~~ Ekv. system:

Skriv $\bar{n} = (A, B, C)$

Finn løsning:

$$\begin{cases} \bar{v}_1 \cdot \bar{n} = 0 \\ \bar{v}_2 \cdot \bar{n} = 0 \end{cases} \iff$$

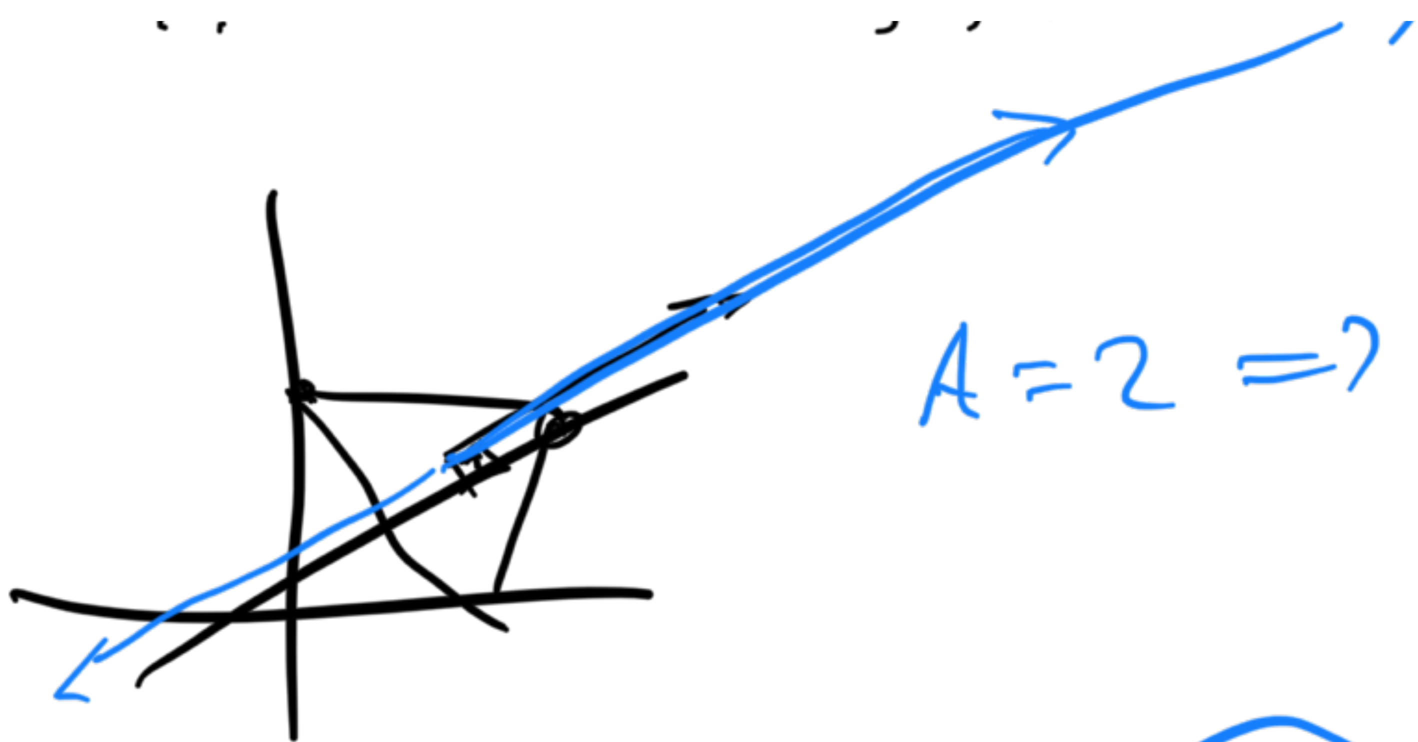
$$\begin{cases} (-1,1,0) \cdot (A,B,C) = -A + B = 0 \\ (-1,0,1) \cdot (A,B,C) = -A + C = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ Ekv. blir: $\begin{cases} -A + B = 0 \\ -A + C = 0 \end{cases}$

Ser: $B = A$, $C = A$,

Kan nu ta $A = 1 \Rightarrow B = C = 1$.

$\therefore \quad \bar{n} = (1,1,1)$



$A=2 \Rightarrow B=C=2.$

## Linjära ekvationer i $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ $(/\mathbb{R}^n)$

(kap 2.1).

$\mathbb{R}^2$: $\quad a_1 x + a_2 y = b$

Ö: figur? linje! tex

Ö: kuring: när?
villkor på $a_1, a_2, b$?

$(a_1, a_2) \neq (0,0)$.

$\mathbb{R}^3$: $\quad a_1 x + a_2 y + a_3 z = b$

Ö: figur? Plan! Tex

Ö: villkor? $a_1, a_2, a_3$ ...

Ö: $(a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$

Ö: $\begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = 0, & b = 0 \\ \text{—— ıı ——}, & b \neq 0. \end{cases}$

(gör!)

$\mathbb{R}^n$: $$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$$

$(\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$.

Bild: "hyperplan".

Linjär: de okända variablerna $(x, y, z, x_1, x_2 \ldots$ etc$)$ har grad $1$.

(Anm: viser $a_1, a_2, \ldots$ som kända konstanter.)

System av linjära ekvationer (2 okända, $x, y$).

Ex:

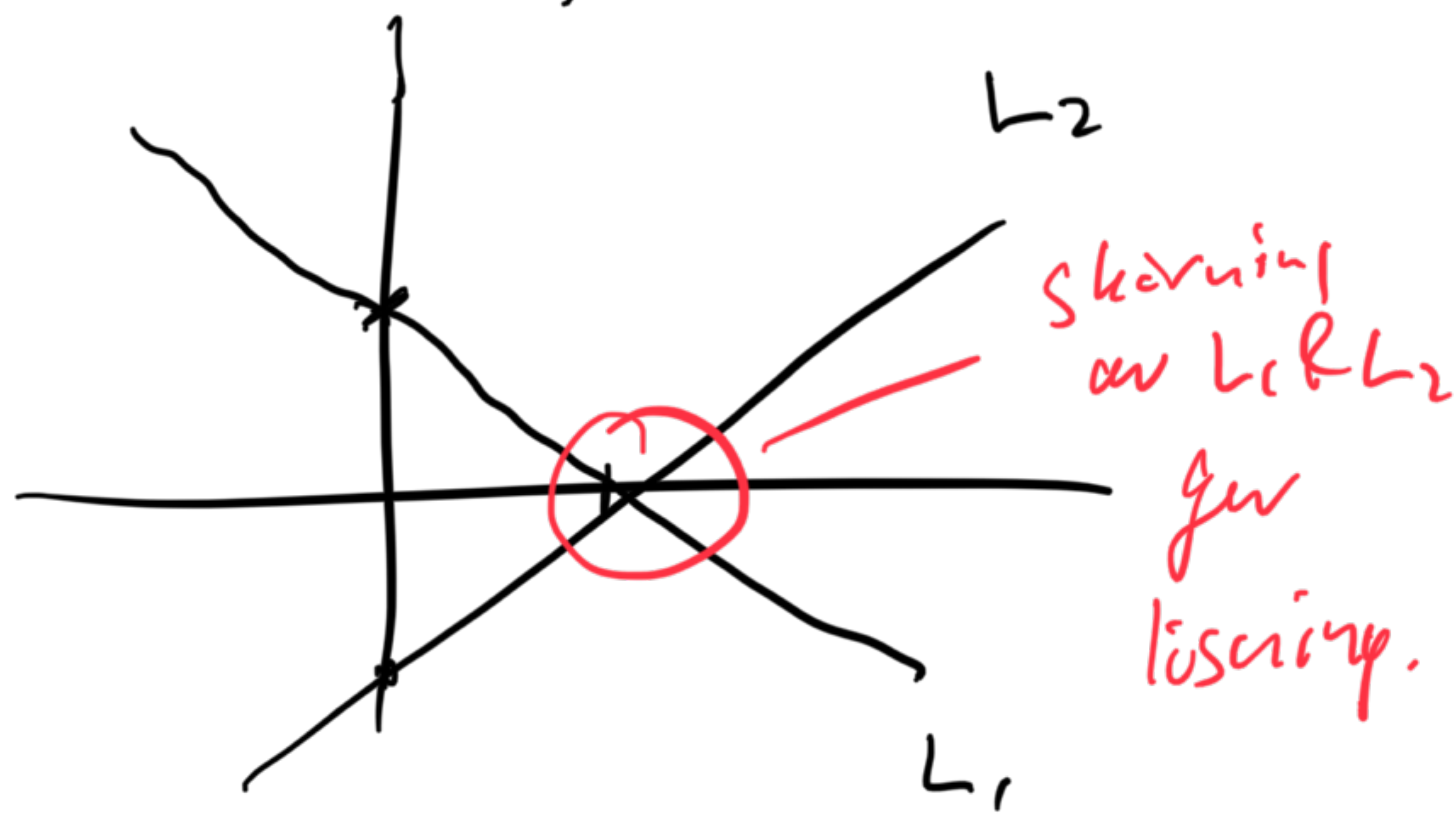
linje $h_1$

$$(1)\quad \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$$

$x - y = 1 \to$ linje $L_2$

$\to y = x - 1$

geometrisk lösning:

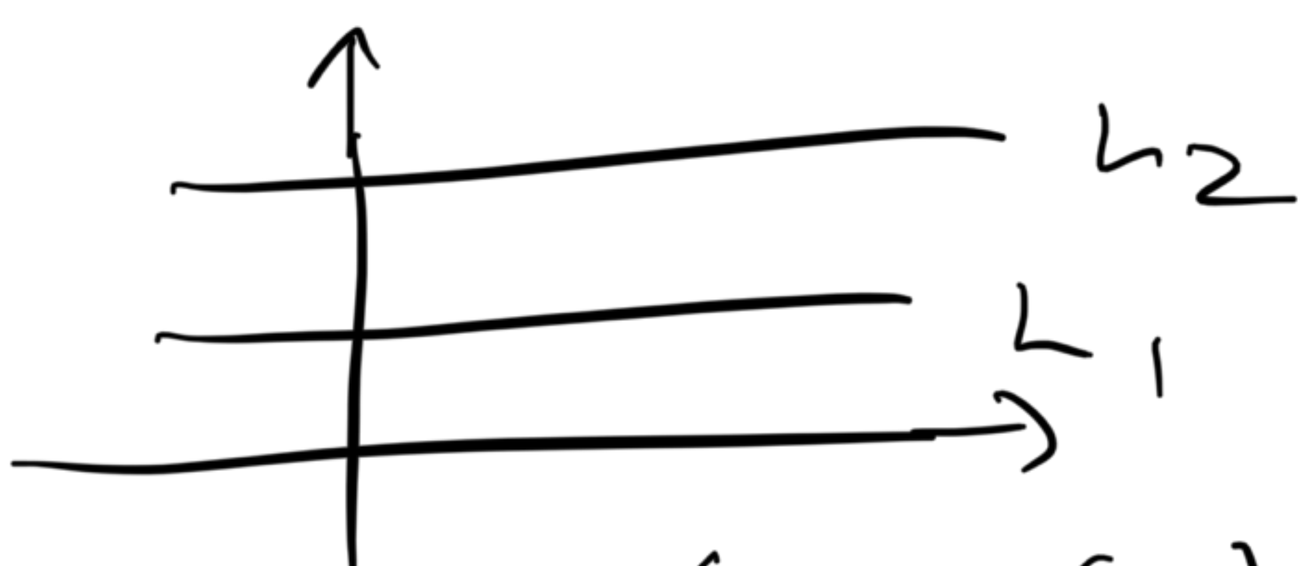



Två linjer skär typiskt varandra i en punkt.

(typiskt där vi precis en lösning!)

**Men:**

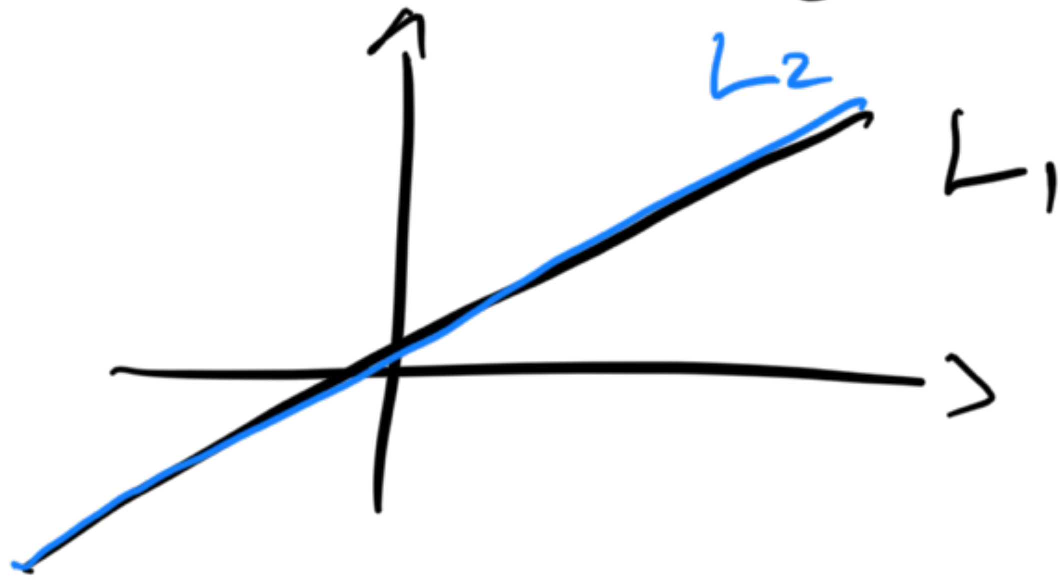
a)




$$L_1 \cap L_2 = \{(x,y) : (x,y) \in L_1 \text{ och } (x,y) \in L_2\}.$$

$= \{ \} = \emptyset$
(tomma mängden).

b)




$L_1 = L_2$

$L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2$
dvs en linje av
lösningar!

Se fig 2.1.2 för hur
3 plan kan skära
~~varandra~~ varandra.
("Typiskt" skär 3 plan
i $\mathbb{R}^3$ varandra i precis
en punkt.).

Def: En <u>lösning</u> till
$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$$ är

en "bunt tal" (n-tupel)
$s_1, s_2, \ldots, s_n$ så att
insättning av $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2, \ldots$
.. $x_n = s_n$ ger likhet
(dvs VL = HL).

Def: Lösningsmängden till en ekvation (eller system av ekvationer) är mängden n-tupler av lösningar (till alla ekvationerna).

Ex:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, är en lösning.
$(0, 0, 0)$ är lösning till (2).

Ser även: ~~En~~ $x_1 = 1$, $x_2 = -1$
$x_3 = 1$
är en lösning.

(kan skriva: $(1, -1, 1)$ ger lösning.).

Def: Om systemet har minst en lösning sägs det vara konsistent. Om ingen lösning: inkonsistent.

Anm: System av linjära ekvationer har antingen ingen, precis en, eller oändligt många lösningar.

Ex: Lös

$$(3) \quad \begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=4. \end{cases}$$

Subtraktion av 2. rad$_1$ från rad$_2$ ger

$$\begin{cases} x+y=1 \\ \underline{2x-2x}+y-2y=4-2\cdot 1 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} x+y=1 \end{cases}$$

$$\left\{ \quad -y = 2 \right.$$

$\therefore \quad y = -2 \implies x = 1 - y = 1-(-2) = 3.$

$\therefore \quad x = 3, \quad y = -2$ är lösning (den enda!)

Anm: Lätt att kolla lösning: (gratispoäng på tentan!)

insättning av $x=3$, $y=-2$ i (3) $\left( (3) \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \right)$

$\therefore \quad 3 + (-2) = 1 = HL$

$\qquad 2 \cdot 3 + (-2) = 6 - 2 = 4 = HL$

När händer "ingen lösning"?

Typiskt: efter förenkling får vi något i stil med

$$\begin{cases} x + y = 99 \\ 0x + 0y = 5 \end{cases}$$

INGEN lösning!!

Anm: Om ~~&~~ alla HL $= 0$ finns "trivial" lösning!

Ex
$$\begin{cases} 99x + 101y = 0 \\ 55x - 10000y = 0 \end{cases}$$

"Uppenbart" att $x = y = 0$.

Anm: Om alla HL $= 0$ sägs systemet vara homogent (och har alltid minst en lösning; den triviala).

Motsats: "inhomogent" (dvs