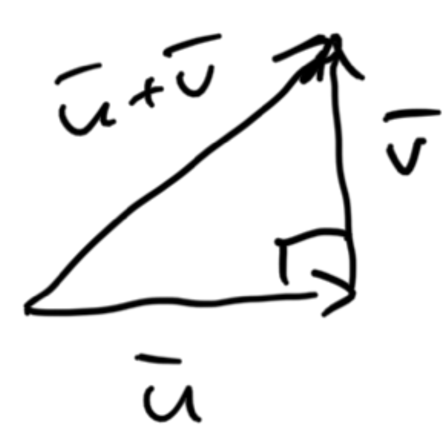
SF1624, F2

Skalärprodukt, forts.

Några viktiga egenskaper för norm / längd.

- Pythagoras (i $\mathbb{R}^n$): Om $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ är ortogonala så gäller:

  $|\bar{u}+\bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2$



  Ö: visa!

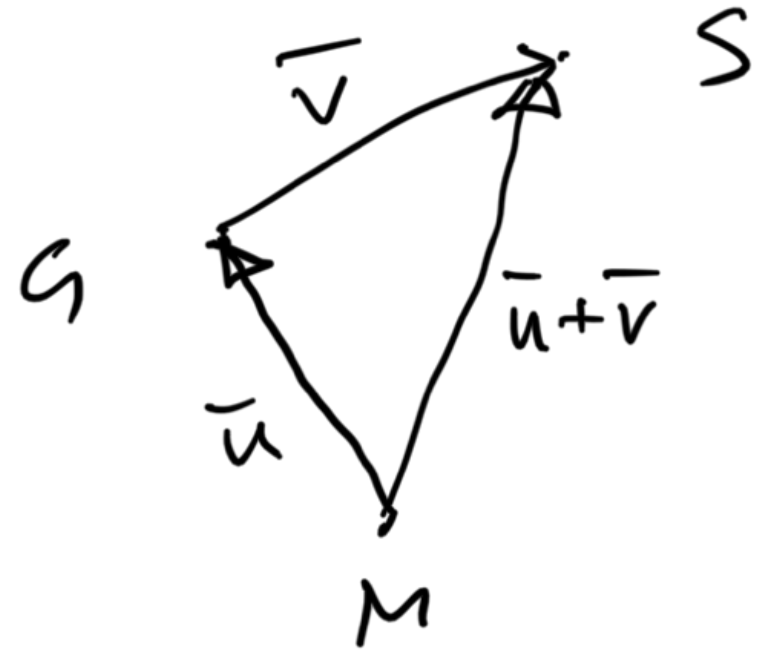
- Cauchy-Schwartz: $|\bar{u}\cdot\bar{v}| \leq |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|$

  ÖÖ: visa! Ledtråd: vet att

  $0 \leq |\bar{u}+t\cdot\bar{v}|^2$ gäller för alla $t \in \mathbb{R}$;

  välj sedan t "listigt". (Minimera längd av $\bar{u}+t\cdot\bar{v}$.)

- Triangel olikheten: $|\bar{u}+\bar{v}| \leq |\bar{u}| + |\bar{v}|$.



· Parallellogramlagen:

$$|\bar u+\bar v|^2+|\bar u-\bar v|^2 = 2\cdot(|\bar u|^2+|\bar v|^2)$$

Ö: visa.

Ex: Parallellogram:

Kom ihåg: $|\bar a|^2=\bar a\cdot\bar a$.
$\bar a\cdot\bar b=\bar b\cdot\bar a$

$$|\bar u+\bar v|^2+|\bar u-\bar v|^2 = (\bar u+\bar v)\cdot(\bar u+\bar v)+(\bar u-\bar v)\cdot(\bar u-\bar v)$$

$$= \bar u\cdot\bar u+\bar u\cdot\bar v+\bar v\cdot\bar u+\bar v\cdot\bar v+\bar u\cdot\bar u-\bar u\cdot\bar v-\bar v\cdot\bar u+\bar v\cdot\bar v$$

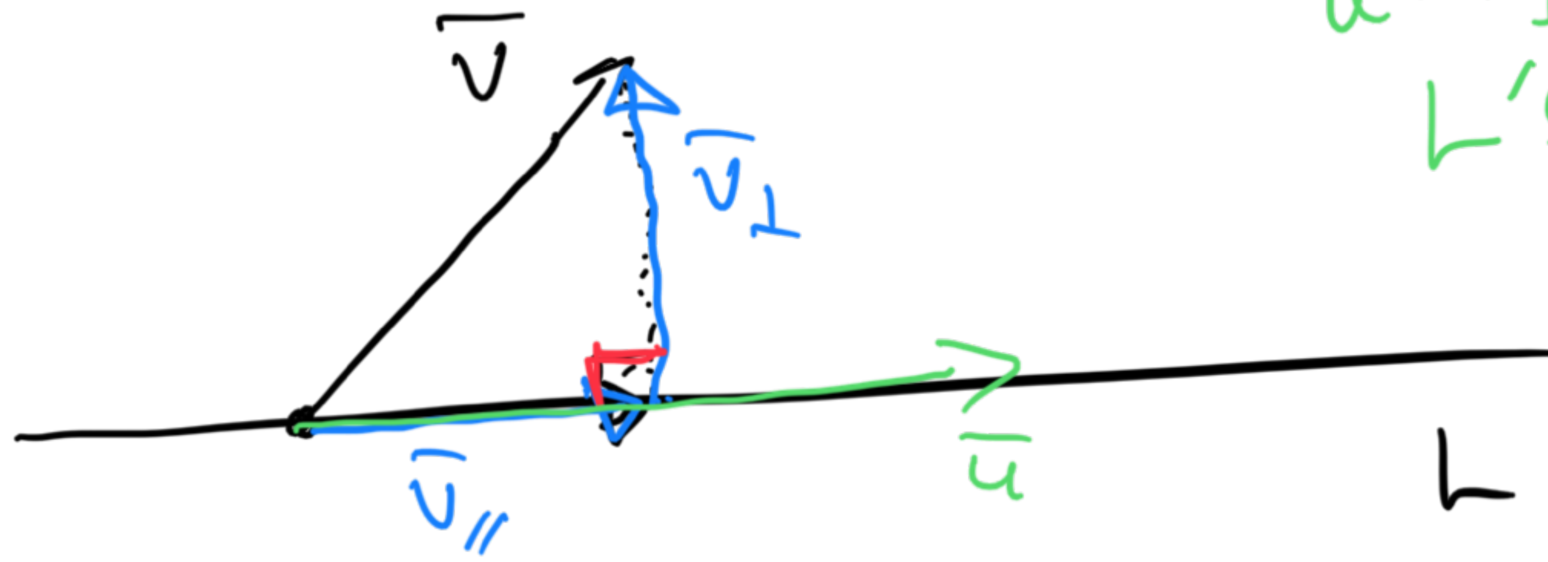
$$= |\bar u|^2+\underline{2\cdot(\bar u\cdot\bar v)}+|\bar v|^2+|\bar u|^2-\underline{2(\bar u\cdot\bar v)}+|\bar v|^2$$

tar ut!

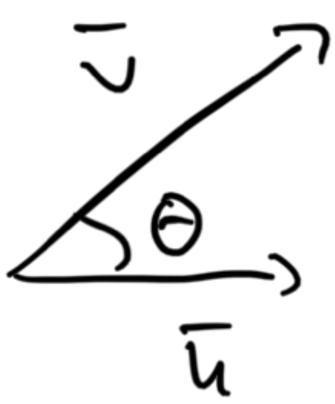
$$= 2|\bar u|^2+2|\bar v|^2 = 2\cdot(|\bar u|^2+|\bar v|^2).$$

Projektion på linje (sid 380-382 i bok).

$\bar{u}$: ligger i L's riktning.

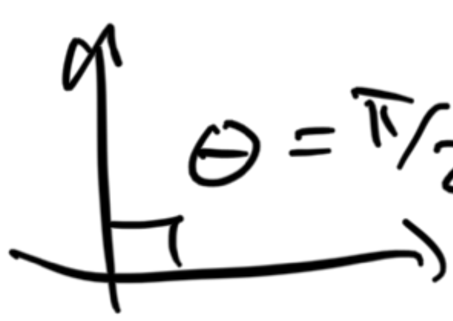


Uppdrag: skriv $\bar{v} = \bar{v}_{\parallel} + \bar{v}_\perp$
där $\bar{v}_{\parallel}$ är parallell med L
och $\bar{v}_\perp$ är vinkelrät mot L
($\text{dvs } \bar{v}_{\parallel} \cdot \bar{v}_\perp = 0$).



$$0 = |\bar{u}\cdot\bar{v}| = \underbrace{(\cos\theta)}_{=0} \cdot \underbrace{|\bar{u}|}_{\neq} \cdot \underbrace{|\bar{v}|}_{\neq 0}$$

$$\cos(\theta) = 0 \implies \theta = \pm \pi/2$$
$$(\theta = \pm 90^\circ)$$



$$\theta = \pi/2 \implies \bar{u}\cdot\bar{v} = 0.$$

$\|\bar{v}\|$ vs $|\bar{v}|$.
↑ lättare att skriva!

$t \in \mathbb{R}$

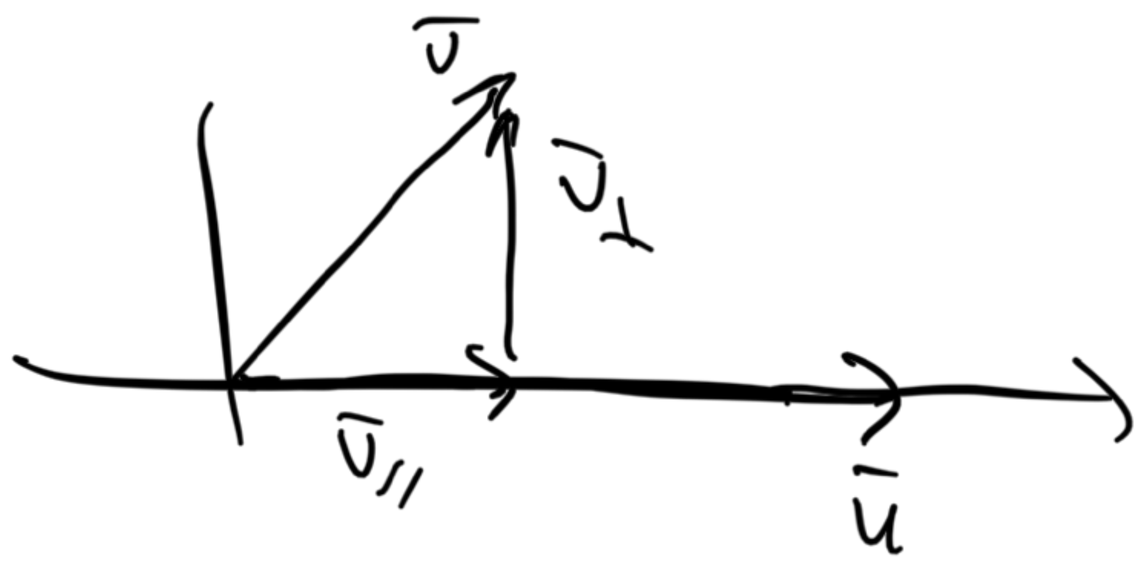
<u>Men</u>: $|t\cdot\bar{v}| = |t|\cdot|\bar{v}|$

känd)

begrepp som reellt tal

olika betydelse!

Kanske bättre? $\|t\cdot\bar{v}\| = |t|\cdot\|\bar{v}\|$



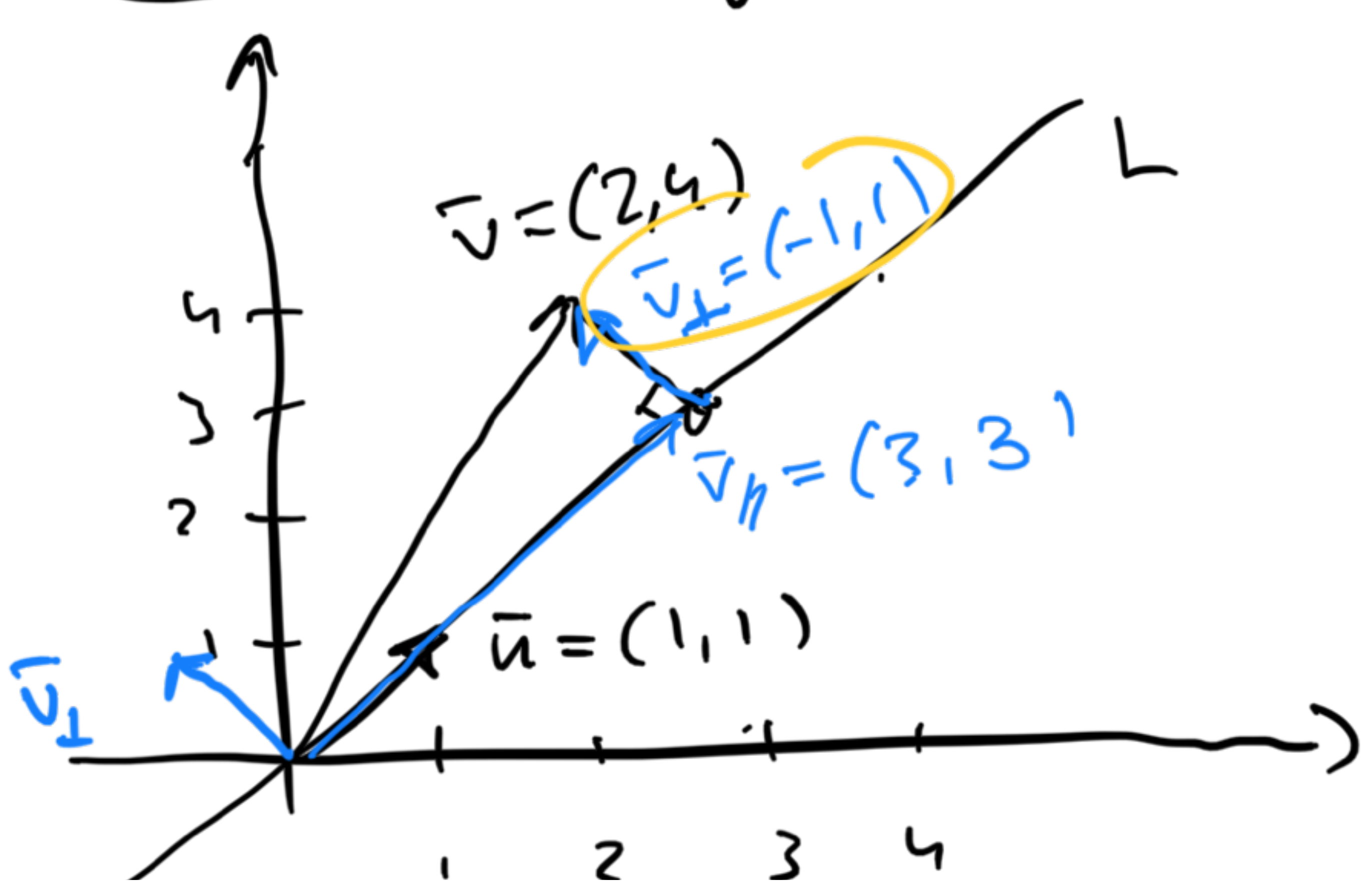
Hur hitta $\bar{v}_{\parallel}$ & $\bar{v}_\perp$? Skalärprodukt!

Om $\bar{u}$ har samma riktning som L

kan vi ta: $\bar{v}_{\parallel} = \underbrace{\frac{\bar{v}\cdot\bar{u}}{|\bar{u}|^2}}_{\text{skalär}} \cdot \underbrace{\bar{u}}_{\text{vektor}}$

och $\bar{v}_\perp = \bar{v} - \bar{v}_{\parallel}$.

Ex: L ges av $y = x$, $\bar{v} = (2,4)$.



$|\bar{u}|^2 =$

$= |(1,1)|^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$

$$\bar{v}_{\parallel} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{u}}{|\bar{u}|^2}\cdot\bar{u} =$$

$$= \frac{(2,4)\cdot(1,1)}{2}\cdot(1,1) = \frac{2\cdot 1 + 4\cdot 1}{2}\cdot(1,1)$$

$$= \frac{6}{2}(1,1) = (3,3)$$

$$\therefore\ \bar{v}_{\parallel} = (3,3)$$

$$\bar{v}_{\perp} = \bar{v} - \bar{v}_{\parallel} = (2,4)-(3,3) = (-1,1)$$

$$\therefore\quad \bar{v}_{\parallel} = (3,3),\quad \bar{v}_{\perp} = (-1,1).$$

"alltså"

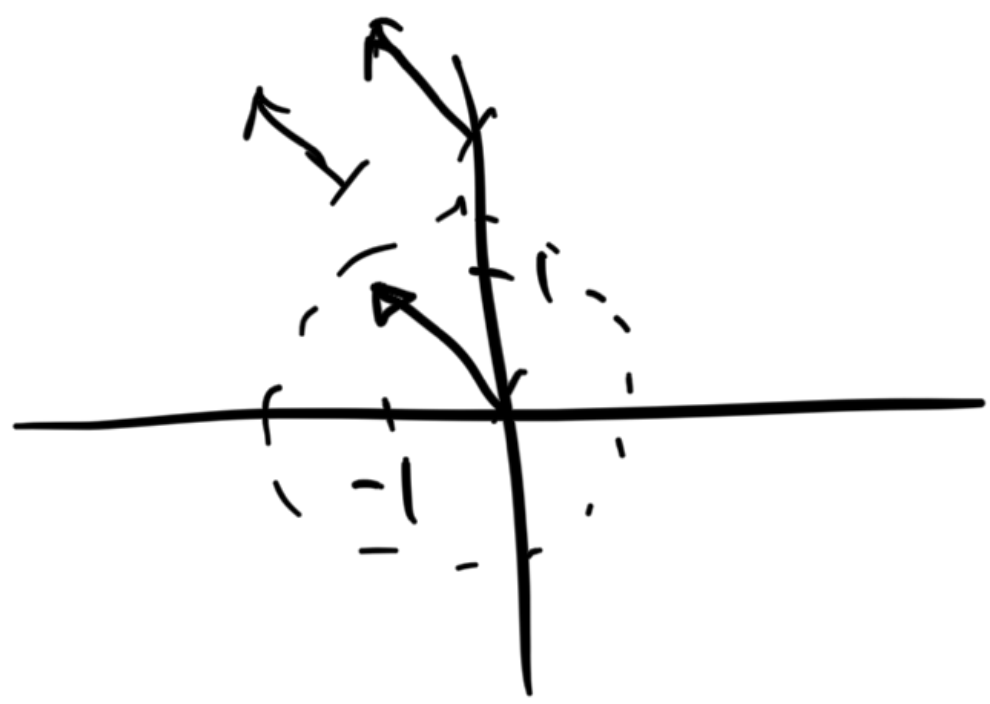
Koll: är verkligen $\bar{v}_{\parallel}$ & $\bar{v}_{\perp}$ vinkelräta (ortogonala)?

Dvs: är $\bar{v}_{\parallel}\cdot\bar{v}_{\perp} = 0$

Koll: $(3,3)\cdot(-1,1) = 3\cdot(-1)+3\cdot 1$
$= 0.$ OK!

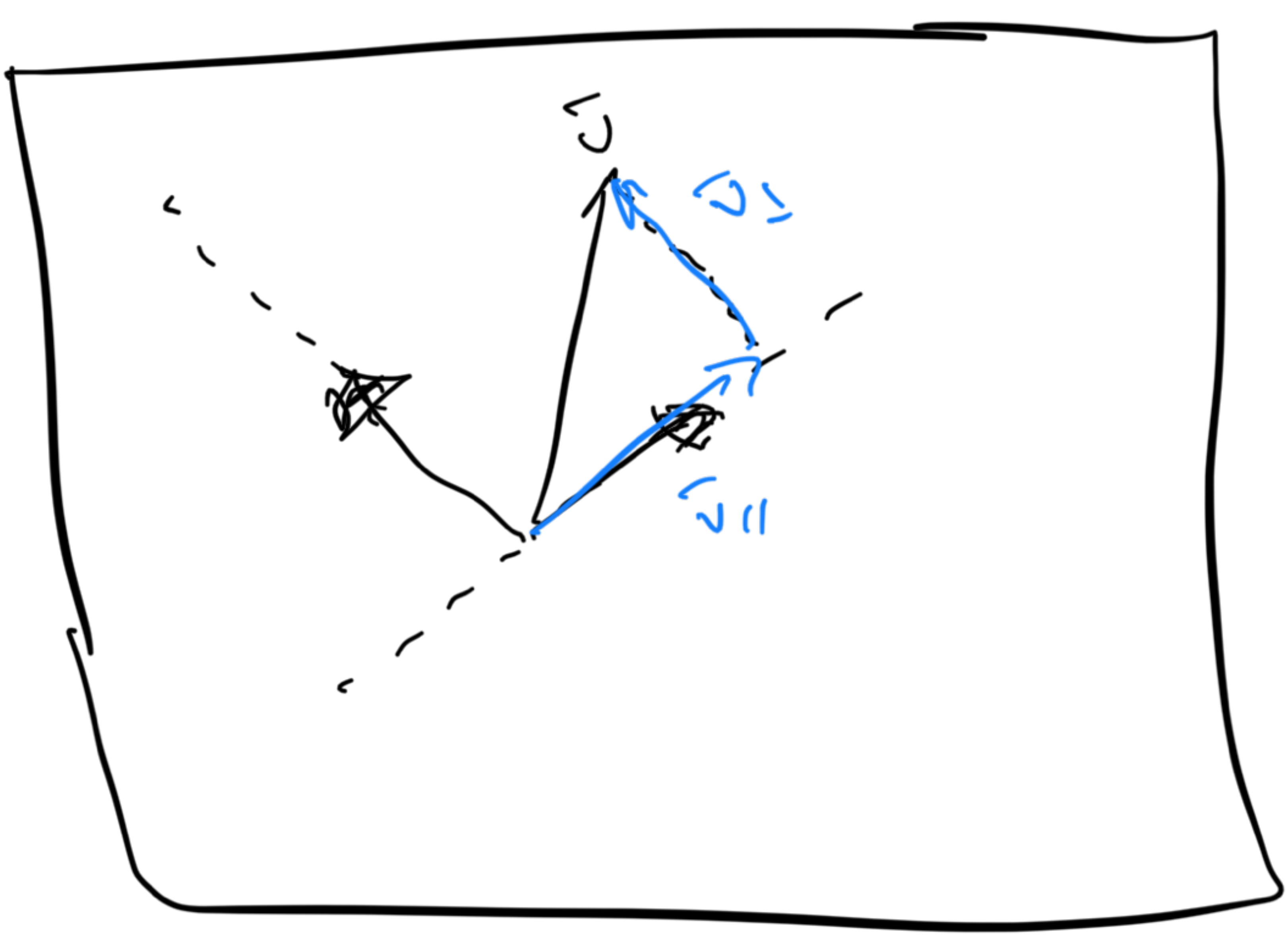
Koll 2: har $\bar{v}_{\parallel}$ & $\bar{u}$ samma riktning?
Dvs har $(3,3)$ & $(1,1)$ samma
riktning? Ja! Då $3\cdot(1,1) =$

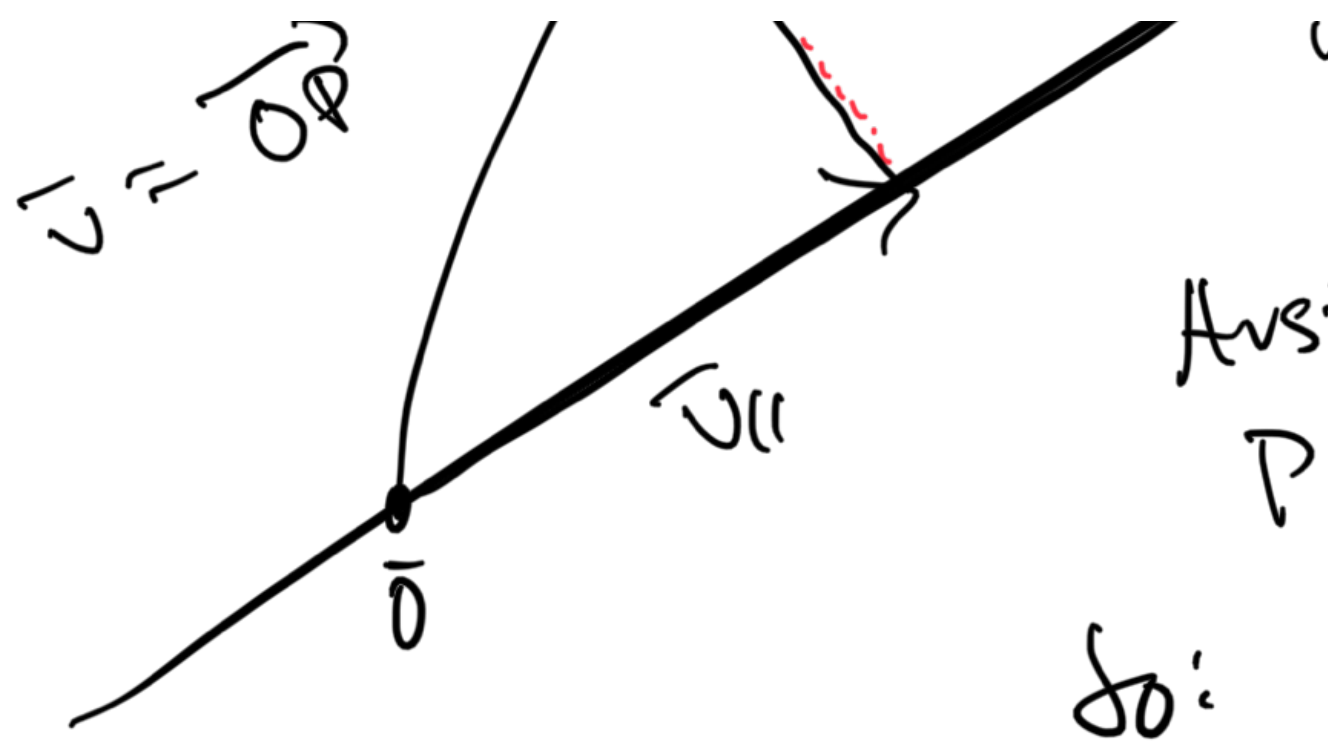
$= (3,3).$



$\bar{v} = (-1,1)$

Anm: Detta funkar även i $\mathbb{R}^3$ (& $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$.)



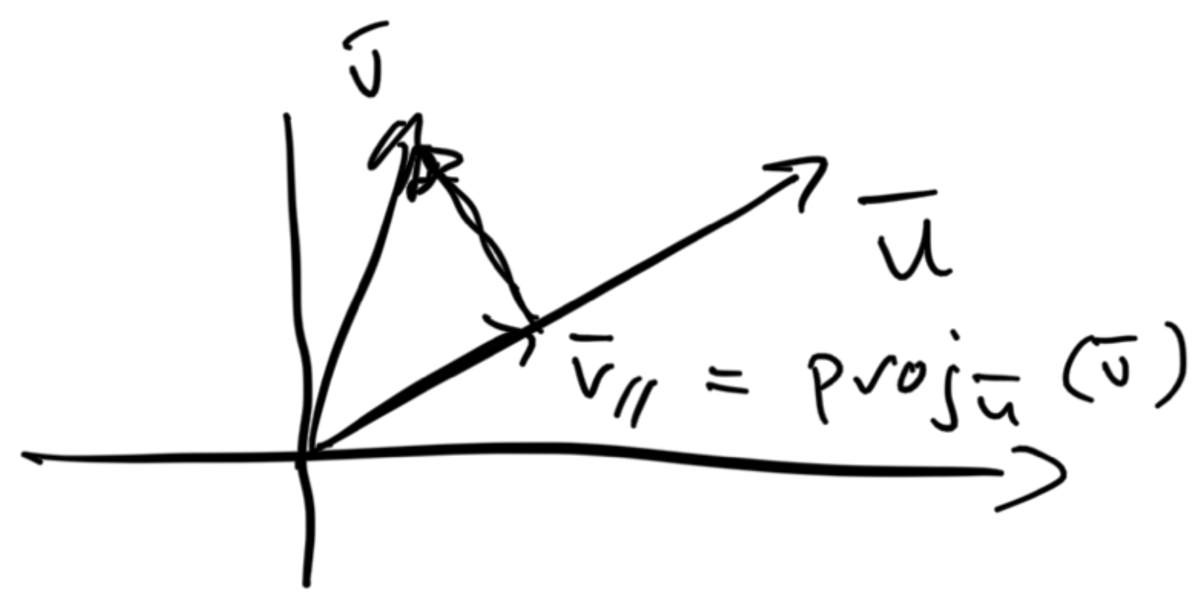


Avstånd mellan P & L?

Så: $|\bar{v}_{\perp}|$

Notation: Skriver

$$\bar{v}_{\parallel} = \text{proj}_{\bar{u}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v}\cdot\bar{u}}{|\bar{u}|^2}\cdot\bar{u}$$



Anm: om vi bara bryr oss om $|\bar{v}_{\parallel}|$ (dvs längden) kan vi förenkla lite:

$$|\bar{v}_{\parallel}| = \left|\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|^2}\cdot\bar{u}\right| = \left|\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|u|^2}\right|\cdot|\bar{u}|$$

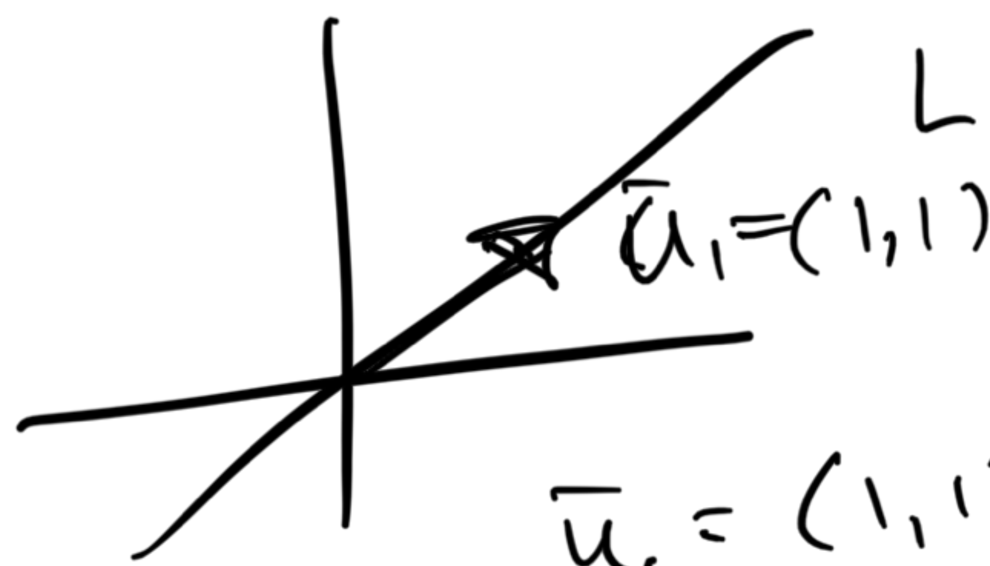
skalär vektor

$$= \frac{|\bar{u}\cdot\bar{v}|}{} |\bar{u}| = \frac{|\bar{u}\cdot\bar{v}|}{}.$$

$\overline{|\bar{u}|^2}$ $\quad$ $|\bar{u}|$

(Extra trevligt om $|\bar{u}| = 1$.)

<u>Ex</u>



$L = \{(x,y) : y = x\}$

$$\bar{u}_1 = (1,1)$$

$$|\bar{u}_1| = \sqrt{2}$$

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

~~Ex~~

Linjer & plan i $\mathbb{R}^2$ / $\mathbb{R}^3$ (Kap 1.3)

Ekvation för linje i $\mathbb{R}^2$:

(x,y) så att

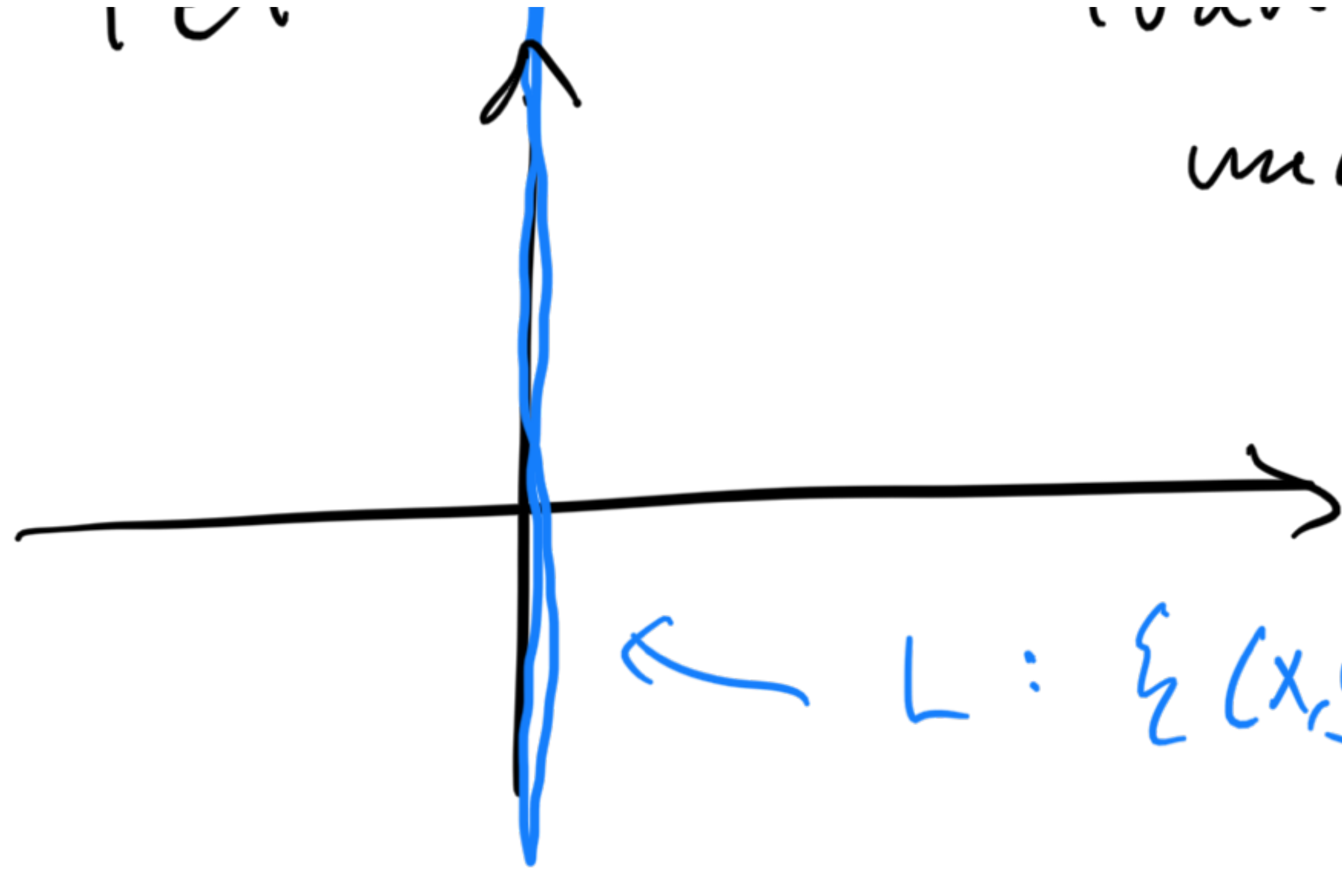
$$Ax + By = C.$$

(Anm. linje genom origo : $Ax + By = 0$).

Q: Varför inte $y = kx + m$?

"Fel" $\quad$ lodrät linje

med $kx+m$?



$L : \{(x,y) : x=0\}$.

Anm: om $B \neq 0$ kan vi göra om $Ax+By=C$ till $kx+m$ form

$$By = C - Ax$$

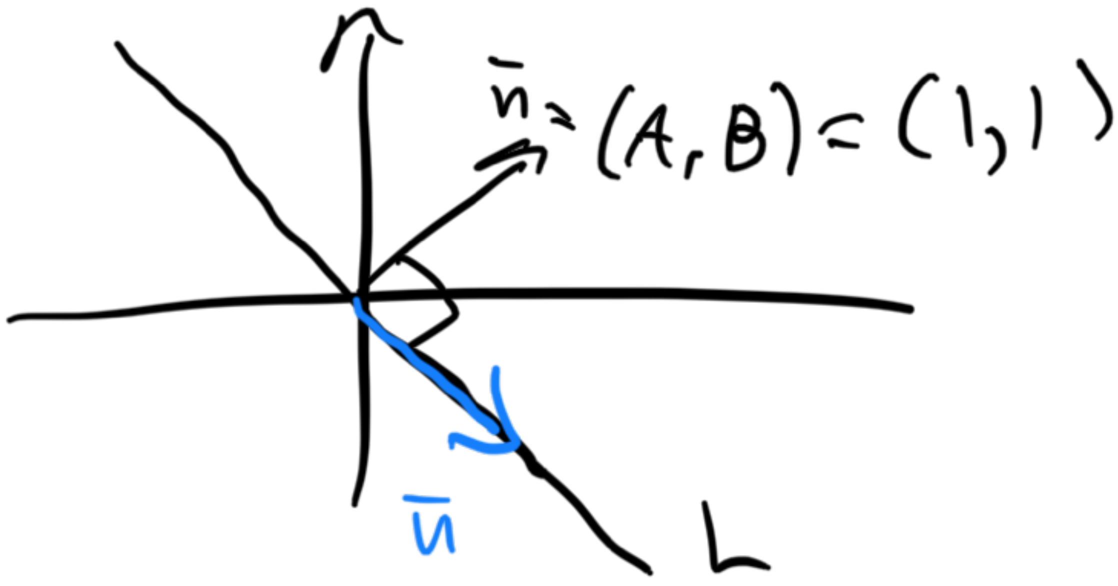
$$\Rightarrow \quad y = \frac{C}{B} - \frac{A}{B}\cdot x = \underbrace{\left(-\frac{A}{B}\right)}_{k} x + \underbrace{\frac{C}{B}}_{m}$$

Ex: $A = B = 1, \quad C = 0$

får vi: $x+y=0$

$$\boxed{\begin{array}{c} Ax+By=C \\ \downarrow \\ x+y=0 \end{array}}$$

$$\Rightarrow \quad y = -x$$



$\bar{u} = (1,-1)$

Notera: $\bar{n} \perp L$.

Koll att $\bar{u} \perp \bar{n}$ dvs

$\bar{u} \cdot \bar{n} = 0$!?

$$\bar{u} \cdot \bar{n} = (1,-1)\cdot(1,1) = 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 = 1 - 1 = 0.$$

$\therefore$ (A,B) alltid normalvektor till linjen!

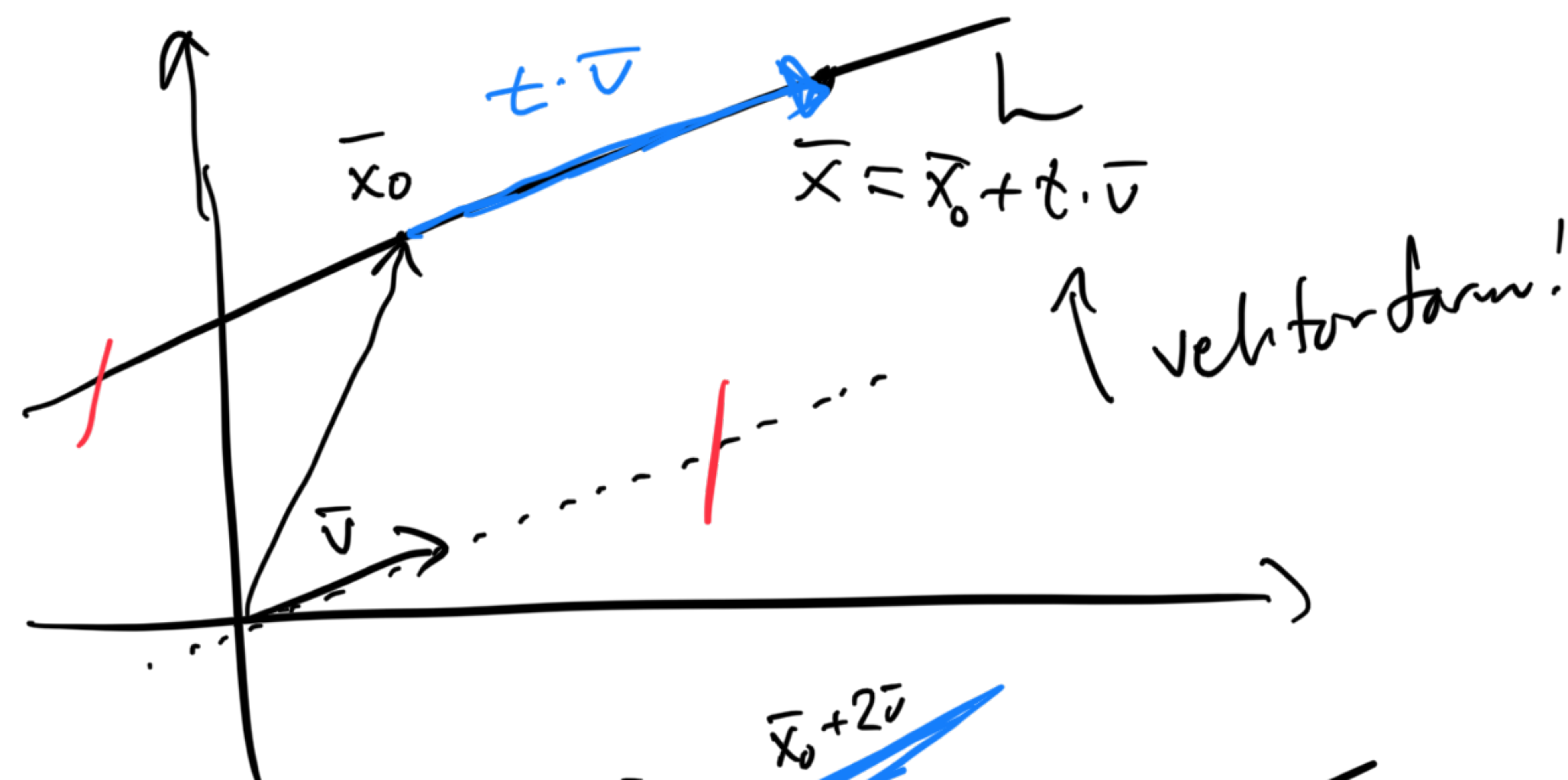
Linje på vektor/parameterform:

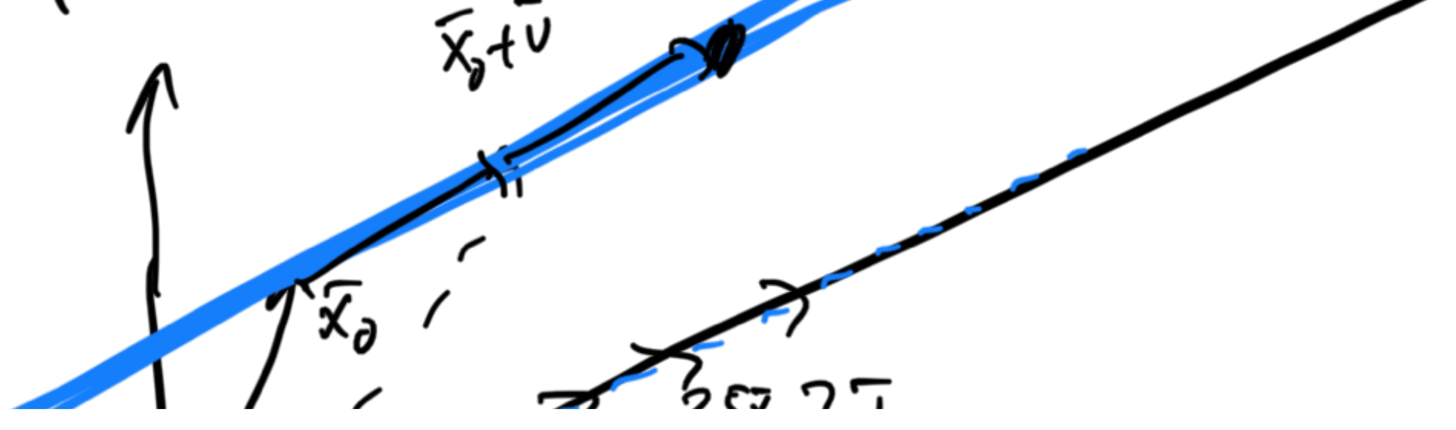
$$\bar{x} = \bar{x}_0 + t \cdot \bar{v} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

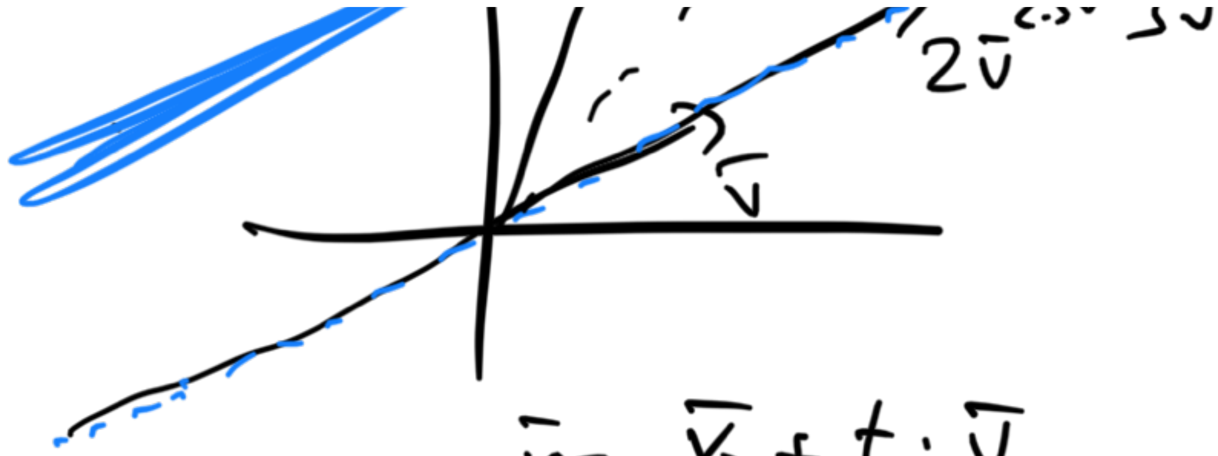
där $\bar{x}_0$ är punkt på linjen

och $\bar{v}$ har samma riktning

som L.







$t \cdot \bar{v}$ ger linje genom origo

$\bar{x} = \bar{x}_0 + t \cdot \bar{v}$

$t = 0$

$\Rightarrow \bar{x}_0 + t \cdot \bar{v} = \bar{x}_0 + \underbrace{0 \cdot \bar{v}}_{\bar{0}} =$

$= \bar{x}_0 + \bar{0} = \bar{x}_0$

$\underline{t = 1}$ $\bar{x}_0 + 1 \cdot \bar{v}$

Vektorform: $\bar{x} = \bar{x}_0 + t \cdot \bar{v}$ $(*)$

Om $\bar{v} = (a, b)$ och $\bar{x}_0 = (x_0, y_0)$

och $\bar{x} = (x, y)$ så ger $(*)$ att

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t \cdot (a, b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \end{cases}$$

linje på parameterform.

__Anm:__ Samma sak i $\mathbb{R}^3$ (eller tom $\mathbb{R}^4$)

ger linje på följande parameterform:

(Säg $\bar{x} = (x_0, y_0, z_0)$, $\bar{v} = (a, b, c)$)

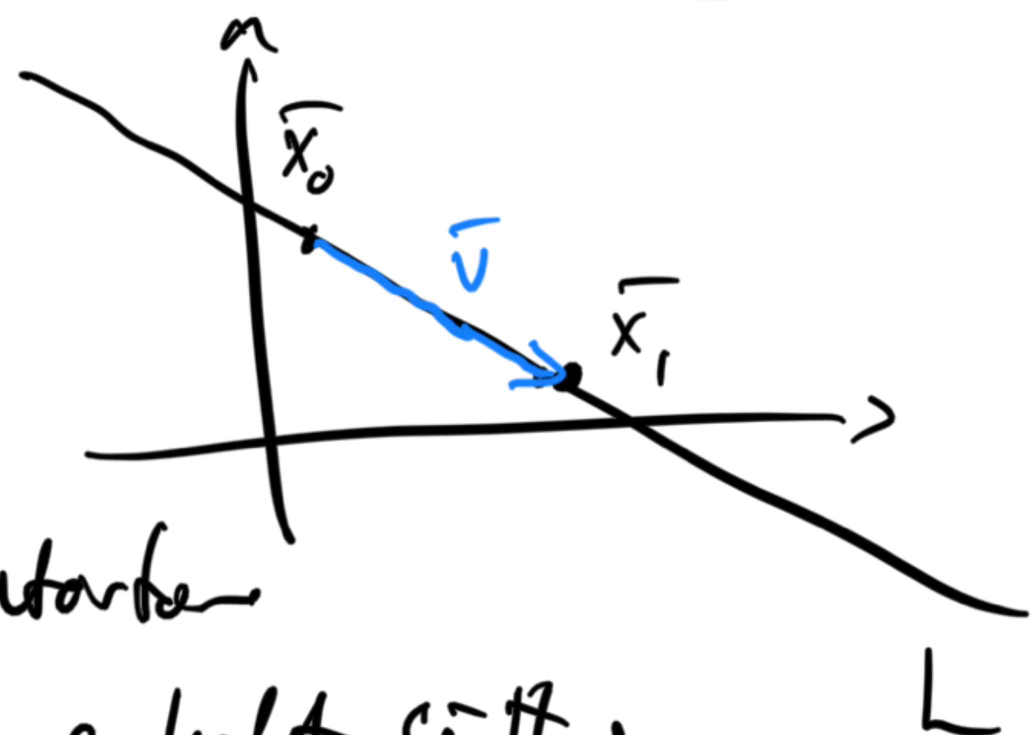
(säg $\bar{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\bar{v} = (a, b, c)$)

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot t \\ y = y_0 + b \cdot t \\ z = z_0 + c \cdot t \end{cases}$$

OBS: vektorform fortfarande $\bar{x} = \bar{x}_0 + t \cdot \bar{v}$.

(Jfr: $\bar{x} = \bar{x}_0 + t \cdot \bar{v}$ (i $\mathbb{R}^3$))

Linje genom två punkter



$\bar{v} = \bar{x}_1 - \bar{x}_0$

Får då följande vektorform för L på superenkelt sätt:

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + t \cdot \bar{v} =$$

$$= \bar{x}_0 + t(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)$$

$$= (1-t) \cdot \bar{x}_0 + t \cdot \bar{x}_1 .$$

Ö: Vad är $\bar{x}$ om $t = 0, 1$?

Ekvation för plan i $\mathbb{R}^3$

$\bar{n} = (A, B, C)$.

(x, y, z) så att

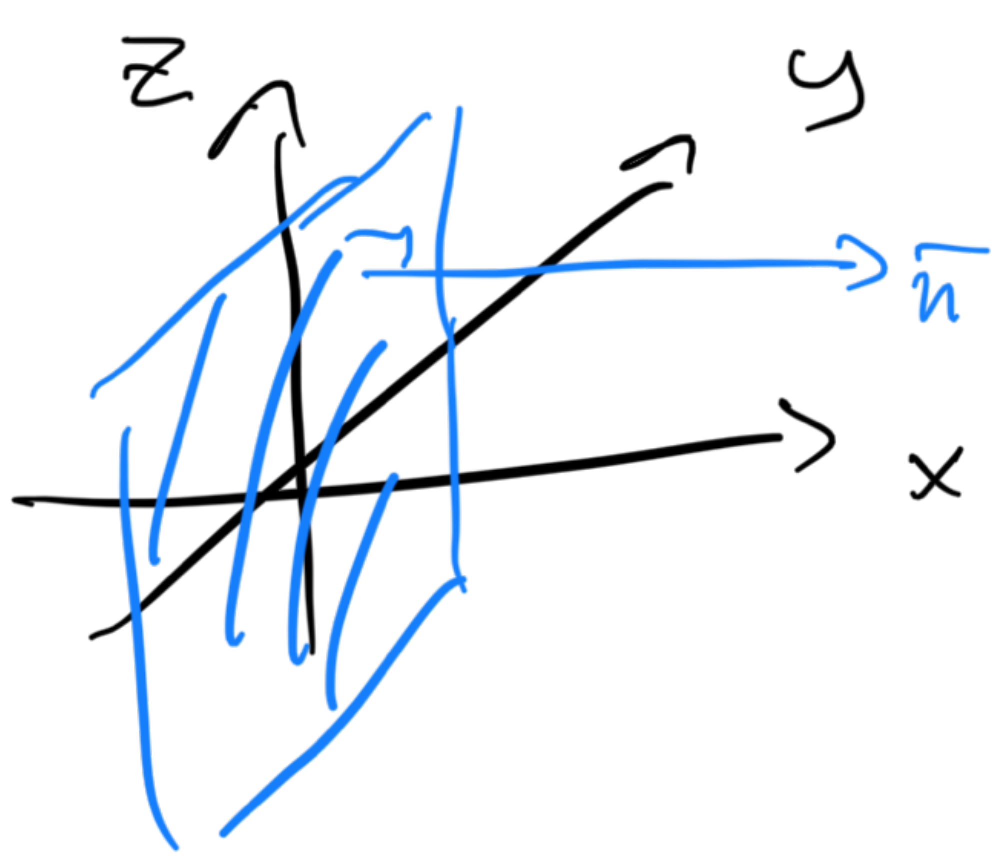
$$Ax + By + Cz = D$$

Q: villkor på A, B, C?

$$(A, B, C) \neq (0, 0, 0).$$

Ex: $B = C = 0$, $A = 1$, $D = 0$.

$\Longrightarrow \quad x = 0$

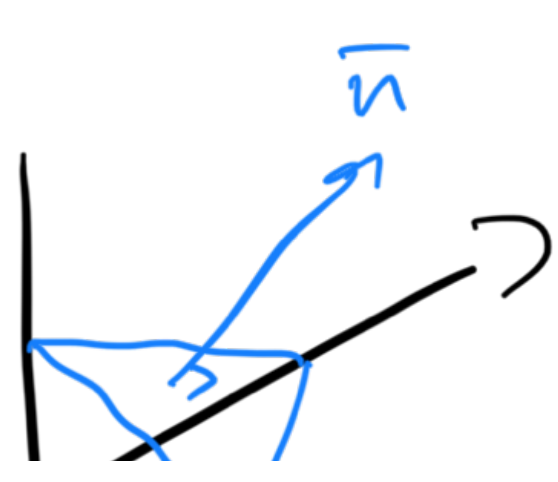


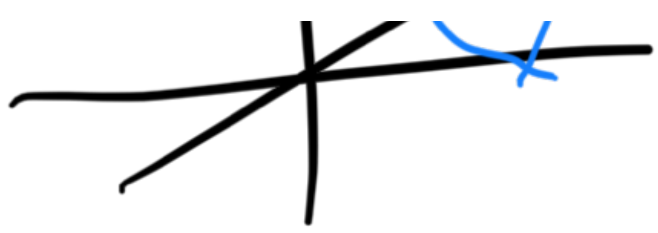
$1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$

$x = 0$

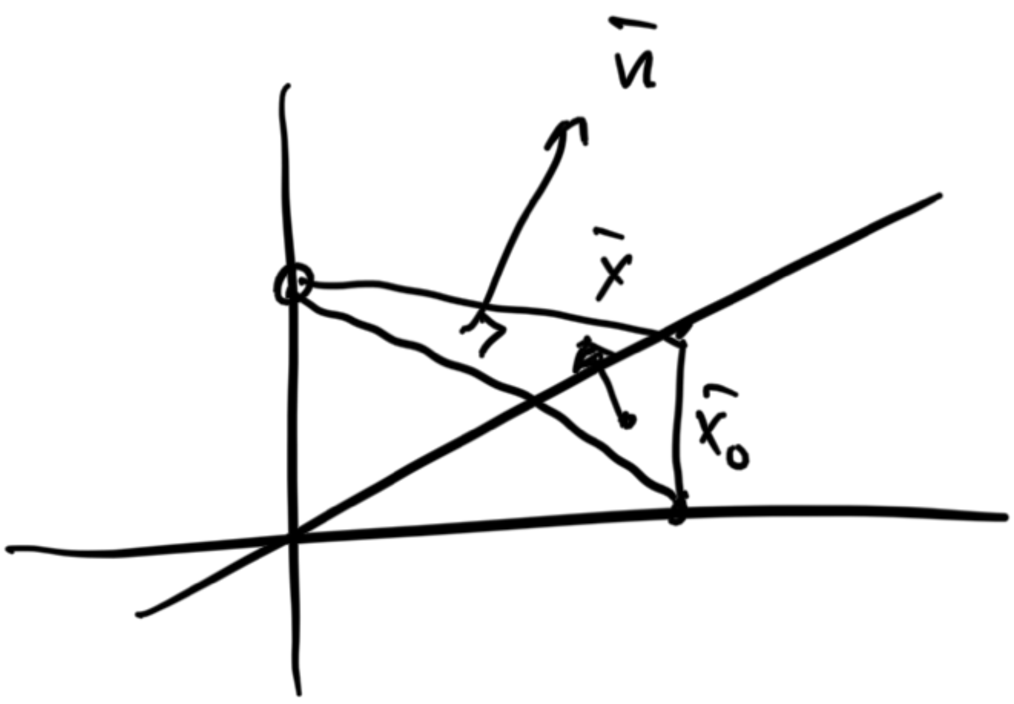
$D = 0 \Rightarrow$ plan som går genom origo.

Anm: $\bar{n} = (A, B, C)$ är normalvektor till planet som ges av





$$Ax + By + Cz = D.$$



Om $\bar{x} \in P$ (P betecknar planet). ser vi att

$(\bar{x}_0 \in P)$ $\qquad \bar{x} - \bar{x}_0 \perp \bar{n}$ dvs

$$(\bar{x} - \bar{x}_0) \cdot \bar{n} = 0 \; ; \text{ om}$$

$$\bar{n} = (A, B, C) \quad , \quad \bar{x} = (x, y, z)$$

$\bar{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ser vi att

$$(\bar{x} - \bar{x}_0) \cdot \bar{n} = 0 \iff$$

$$\bar{x} \cdot \bar{n} = \bar{x}_0 \cdot \bar{n} \iff$$

$$(x, y, z) \cdot (A, B, C) = (x_0, y_0, z_0) \cdot (A, B, C)$$

$$\iff$$

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

AHA! Om vi låter

$$D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

får vi skalärekvationen för P, dvs

$$Ax + By + Cz = D.$$