SF1624, F19 (9.1, 9.3).

9.1 Abstrakta vektorrum:

Vektorer "finns överallt" (röntgenbilder, medicin, styrsystem, big data / ML etc etc): vilka egenskaper "behövs" för att vi ska kunna tänka/räkna "som vanligt" (dvs som i $\mathbb{R}^n$)?

Def 9.1.1: Ett vektorrum (över $\mathbb{R}$) är en mängd V

med två operationer:

$$+ : V \times V \longrightarrow V$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

$$\left(\begin{array}{lll} \bar{v}_1, \bar{v}_2 & \longrightarrow & \bar{v}_1 + \bar{v}_2 \\ t, \bar{v} & \longrightarrow & t \cdot \bar{v} . \end{array} \right)$$

som uppfyller följande egenskaper:

1. "slutet under +".
2. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$
3. $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$
4. $\exists \bar{0} \in V : \bar{u} + \bar{0} = \bar{u} \quad \forall \bar{u} \in V$
5. Givet $\bar{u} \in V$ så finns $-\bar{u}$ så att $\bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$.
6. "slutet skal. mult.".

7. $k(\bar{u}+\bar{v}) = k\bar{u} + k\bar{v}$

8. $(k+l)\bar{u} = k\bar{u} + l\bar{u}$.

9. $k\cdot(l\cdot\bar{u}) = (k\cdot l)\cdot\bar{u}$

10. $1\cdot\bar{u} = \bar{u}$.

Q: varför dessa egenskaper?

Jo: "vill räkna som vanligt"!

Ex: $V = \mathbb{R}^n$ är vektorrum

Ex: $W \subset \mathbb{R}^n$, W delrum

$\Longrightarrow$ W är vektorrum.

Ex: mängden av alla polynom.

Q: dim = ? Oändligt!

Ex: mängden av alla polynom

av grad $\leq k$.

Q: dim?

$\dim = k$!? Nej!

<u>Def</u>: $P_k = \{ f(x) : \text{grad } f \leq k \}$.

$P_1 = \{ a_0 + a_1 x \}$.

$\dim(P_1) = 2$.

$\dim(P_k) = k+1$.

<u>Sats 9.1.2</u>: Antag att V är ett vektorrum, och att $k \in \mathbb{R}$, $\bar{v} \in V$. Då gäller:

a) $0 \cdot \bar{v} = \bar{0} \in V$.

b) $k \cdot \bar{0} = \bar{0}$

c) $(-1) \cdot \bar{v} = -\bar{v}$

Ö: visa själv / läs bok.

Ex: ("halvabstrakt vektorrum"):

$$C([0,1]) = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R}, \ f \text{ är kontinuerlig} \}.$$

Vad är $f = f_1 + f_2$?

Jo, funktionen vi får genom att ta:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(\forall x \in [0,1].).$$

Q: varför är f kontinuerlig!?

Envarre!

$$\lim_{\Delta \to 0} \left(f_1(x+\Delta) + f_2(x+\Delta) \right)$$

$$= f_1(x) + f_2(x).$$

$C([0,1])$: mängden av kontinuerliga funktioner på intervallet $[0,1]$.

($k \to C$).

$C((-\infty,\infty))$: kont. funktioner på $\mathbb{R}$.

$V = \{\text{Polynom av grad} \leq 2\}$.

$\shortparallel$

$a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

$$\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2\} \cong \mathbb{R}^3.$$

<u>Def 9.1.3:</u> Om $W \subset V$ är en icketom delmängd till vektorrummet V säger vi att W är ett <u>delrum</u> om

- W är slutet under addition
- W — " — under skalär multiplikation.

<u>Anm:</u> begreppen linjär <u>kombination</u>

linjärt oberoende,

spänner upp samt bas:
precis som för $\mathbb{R}^n$.

Ex: Funktionerna

$1, \cos^2(x), \sin^2(x) \in C([0,1])$

är linjärt beroende!

Varför? Trig. ettan!

$1 \cdot \cos^2(x) + 1 \cdot \sin^2(x) = \mathbb{1}(x)$

$\forall x \in [0,1]$.

"ett-funktionen"

$\therefore$ $\mathbb{1}$ beror på $\sin^2$ & $\cos^2$.

Def: Lin ~~f~~ V

Är $\sin(x)$ & $\cos(x)$ beroende? (på $C(\mathbb{R})$.)

$$a \cdot \sin(x) + \cancel{a}\ b \cdot \cos(x) = 0 \quad \forall x$$

sätt in $x = 0$: $a \cdot 0 + b \cdot 1 = 0$
$\Rightarrow b = 0$.

—— || —— $x = \pi/2 \Rightarrow a \cdot 1 + b \cdot 0 = 0$
$\Rightarrow a = 0$

$\therefore$ $a = b = 0$, dvs oberoende.

Aha: för $C([0,1])$:

$x = 0 \rightsquigarrow \cancel{a =}\ b = 0$.

$a \cdot \sin(x) = 0 \quad \forall x$

tag $x = \pi/100 \Rightarrow a = 0$.

Def: Låt V vara ett

vektorrum. Om vi kan

hitta en bas för V, bestående

av ändligt många vektorer

$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_k \in V$

säger vi att V är

ändligt-dimensionellt.

(Annars säger vi att

V är oändligt-dimensionellt
och skriver $\dim(V) = \infty$.).

Sats 9.1.7: Om V är

ändligt-dimensionellt

så har alla baser för V

samma antal vektorer!

Poäng: Kan determinera

dim(V) genom att ~~~~ ta

bas $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_k\}$

för V, och sätt

$\dim(V) = k$.

9.3 Linjära avbildningar & isomorfier.

__Def:__ Låt $T : V \to W$ vara en funktion, där V & W är vektorrum.

Vi säger att T är en __linjär avbildning__ om följande gäller:

$$\begin{cases} T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u})+T(\bar{v}) & \forall \bar{u},\bar{v}\in V \\ \text{"additivitet".} & \\ T(c\cdot\bar{u}) = c\cdot T(\bar{u}) & \forall c\in\mathbb{R},\ \forall \bar{u}\in V \\ \text{"homogenitet".} & \end{cases}$$

Poäng: Om T är linjär så gäller:

$$T\left(\sum_{i=1}^{m} c_i \bar{v}_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} c_i \, T(\bar{v}_i)$$

"T bevarar linjärkombinationer".

$$P_n = \{ f(x) \text{ polynom, grad} \leq n \}.$$

Ex: $T : P_n \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

där $T(f) = \begin{bmatrix} f(1) \\ f(2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$T(f_1 + f_2)$ vs $\begin{bmatrix} f_1(1) \\ f_1(2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_2(1) \\ f_2(2) \end{bmatrix}$

Ö: kolla upp!

Ex: $T : P_n \longrightarrow P_n$ där

$T(f) = f'$ (derivera!)

Ex: $T : P_n \longrightarrow P_{n-1}$

där $T(f) = f'$.

(gradtal går ned!)

Notera: $P_{n-1} \subset P_n$

är ett delrum.

Q: Varför är T linjär?

Additivitetskoll:

Vill att $T(f+g) = T(f) + T(g)$

eller för oss:

$VL = (f+g)'$

$HL = f' + g'$

Är $VL = HL$?

Från envarre: derivering

är linjär!

Def: Givet linjär avbildning $T : V \to W$ definierar vi (som tidigare!)

$$\ker(T) = \{\bar{v} \in V : T(\bar{v}) = \bar{0}\}.$$

$$\text{range}(T) = \{T(\bar{v}) : \bar{v} \in V\}.$$

= "$\text{ran}(T)$"

Ex: Om $T : P_n \to P_n$ ges av $T(f) = f'$, så är

$$\ker(T) = \{\text{konstanta polynom}\}$$

$= \{ c_0 : c_0 \in \mathbb{R} \} = \{ c_0 \cdot 1 : c_0 \in \mathbb{R} \}$

$\bar{0} \in P_n$: vad är denna nollvektorn?

Jo: $\bar{0} \in P_n$ är (det tråkiga...) polynomet $0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n$.

("nollpolynomet".)

$\text{range}(T) = P_{n-1}$

(gradtalet går ner!).

$\Downarrow$

$\text{range}(T) \subset P_{n-1}$

Får vi allt?

$$\text{range}(T) \supset \text{Span}\{T(1), T(x), \dots, T(x^n)\}$$
$$= \text{Span}\{0, 1, 2x, \dots, n \cdot x^{n-1}\}$$

$\Longrightarrow$ alla polynom av

$\longrightarrow$ alla polynom av

grad $\leq n-1$ kan

uttryckas m.h.a

$T(1), \dots, T(x^{?})$.

<u>Ex:</u> $T: P_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(f) = \begin{bmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}$$

$\operatorname{Ker}(T) = ?$ So: $\ker(T) = \{\bar{0}\}$.

$f \in \ker(T) \Rightarrow$

$f(1) = f(2) = f(3) = 0$,

dvs f är ett polynom av

grad ≤ 2, med 3 st.

olika nollställen!

$\therefore$ $f \in \ker(T) \Rightarrow f$ är nollpolynomet.

$$P_n = \{ f(x) \text{ polynom}, \ \text{grad}(f) \leq n \}.$$

Vad är $\bar{0} \in P_n$?!

Så: vår nollvektor är "nollpolynomet", dvs

$$0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n.$$

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}.$$

VS :

$$S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = x.$$

Viktiga egenskaper: låt $T : V \to W$ vara linjär avbildning.

Sats 9.3.5 T avbildar ett delrum av V till ett delrum av W.
("T bevarar delrums-egenskapen")

<u>Sats 9.3.6</u> :

- $\ker(T)$ är ett <u>delrum</u> till V

• range(T) är ett delrum till W

$$T : V \longrightarrow W$$

<u>Sats 9.3.7:</u> Låt $T : V \to W$ vara linjär avbildning. Då är följande ekvivalenta:

a) T är ~~en~~ injektiv

b) $\ker(T) = \{\bar{0}\}$.

("räcker att kolla injektivitet i nollan!").

<u>Def 9.3.8:</u> Låt $T : V \to W$ vara linjär avbildning

vara linjär avbildning.

Om T är både *injektiv* och *surjektiv* (skrivs kort: "bijektiv") säger vi att T är en *isomorfi*.

Vidare, om V & W är givna och vi kan hitta en isomorfi $T: V \to W$ säger vi att V och W är *isomorfa*.

Sats (viktig): Låt V vara ett vektorrum med $\dim(V) = n$

Då är $\mathbb{R}^4$ och V

isomorfa.

"V samma sak som $\mathbb{R}^4$."

<u>Ex</u>: Låt $M_{22} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

Ö: M_{22} är ett vektorrum

("addera matriser som vanligt").

Då är M_{22} isomorft

med $\mathbb{R}^4$.

Definiera $T : M_{22} \to \mathbb{R}^4$

genom $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$

Surj? Ja!

Injektiv? Ja!

} ∴ bijektiv, dvs

T är isomorfi!