SF1624, F18 (8.4)

8.4. Kvadratiska former

<u>Ex</u>: $Q_1(x,y) = x^2+y^2 \qquad \geq 0$

$Q_2(x,y) = x^2 + xy + y^2 \qquad ?$

$Q_3(x,y) = x^2 - y^2 \qquad \pm$ (byter tecken)

$Q_4(x,y) = 5x^2 - 19xy + 17y^2 \qquad ??$

$$Q_5(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_1x_3 + 7x_2x_3 + 8x_2^2 + 9x_3^2$$

Kort: Om $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix}$

och $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ får vi:

$$\bar{x}^T A \bar{x} = [x_1 \; x_2] \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 & a_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ a_2 x_1 + a_3 x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2$$

$$= a_1 x_1^2 + 2 a_2 \underbrace{x_1 x_2}_{\text{"korsterm"}} + a_3 x_2^2$$

P.S.S.

3 variabler:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$x_2 x_3 + x_3 x_2$
$= 2 x_2 x_3.$

$\Longrightarrow$

$$\bar{x}^T A \bar{x} = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2$$

$$+ \underbrace{2 a_4 x_1 x_2 + 2 a_5 x_1 x_3 + 2 a_6 x_2 x_3}_{\text{"korstermer"}}.$$

Poeng: "slå ihjel korstermer

utan basbyten!".

Mer generellt: givet symmetrisk matris A och $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ definierar vi en <u>kvadratisk form</u> i n variabler som

$$Q_A(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}.$$

<u>Anm</u>: Om A är <u>diagonal</u>, tex $A = I$, får vi

$$Q_A(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x} = \bar{x}^T \cdot I \bar{x} = \bar{x}^T \bar{x} =$$

$$= [x_1, \ldots, x_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

(<u>inga</u> korstermer!).

<u>Kvadratiska former, 3 problem:</u>

1. För $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$, hur ritar vi lösningen till $Q_A(\bar{x}) = 1$

(Jfr: $A = I = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \Rightarrow Q_A\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right) =$

$= 1\cdot x_1^2 + 1\cdot x_2^2 = x_1^2 + x_2^2$

Bild: $x_1^2 + x_2^2 = 1$. :

Cirkel!

$2x_1^2 + x_2^2 = 1 \rightsquigarrow$ ellips etc.

2. Villkor på A så att

$Q_A(\bar{x}) > 0$ för $\bar{x} \neq 0$?

3. Kan vi klura ut min/max

av $Q_A(\bar{x})$ om $|\bar{x}| = 1$?

Idé: <u>ortogonal diagonalisering!</u>

(varibelbyten; mycket

tittiga!).

Ex: $A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \Longrightarrow$

$$Q_A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 3x^2 + 1 \cdot xy + 1 \cdot yx + 4y^2$$

$$= 3x^2 + 2xy + 4y^2.$$

$\parallel$

$[x\ y]A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Ex: $A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ & \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x \\ y \end{array}$ (ej symmetrisk!)

$$Q_A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 3x^2 + 2xy + 0 \cdot yx + 4y^2$$

$$= 3x^2 + 2xy + 4y^2.$$

SAMMA form!

Råd: använd symmetriska matriser!

Ex: A symmetrisk $\overset{P^{-1}AP}{=}$ $P^TAP = D$

$\Longrightarrow A = PDP^{-1} = PDP^T$

med D diagonal & P ortogonal.

∴ Om vi gör variabelbyten $\bar{x} = P\bar{y}$

så får vi (viktig räkning!)

$$Q_A(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x} = (P\bar{y})^T \cdot A \cdot P\bar{y} =$$

$$= y^T (P^T A P) \bar{y} = \bar{y}^T D \bar{y} \Rightarrow$$

Minnesregel: $AP = PD$

$$P^T A P = P^{-1} A P = D \qquad A = PDP^{-1} = PDP^T$$

$$AP = A[\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n]$$

↑ egenvektorer!

$$\Rightarrow \left(\text{om } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}, \ \bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right)$$

$$\bar{y}^T D \bar{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots \lambda_n y_n^2$$

(Ö: kolla!!).

Vi säger att variabelbytet

Vi säger att variabelbytet

$\bar{x} = P\bar{y}$ <u>diagonaliserar</u>

den <u>kvadratiska formen.</u>

("död åt korstermer!").

<u>Anm</u>: Om $Q_A(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}$

och A <u>ej</u> symmetrisk, vad göra?

Då: bilda $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$

Ö: ∘ visa att $B^T = B$.

(symmetrisk!)

∘ visa att $Q_A(\bar{x}) = Q_B(\bar{x})$.

<u>Ex</u>: $A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \end{array} \Rightarrow Q_A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) =$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + 0x_2x_1 + x_2^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2.$$

$$B = \frac{1}{2}(A + A^T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$Q_B\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2^2 =$$

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2.$$

$$\therefore \quad Q_A = Q_B.$$

<u>Sats 8.4.1</u>: (principalaxelsatsen):

Låt A vara symmetrisk matris.

Då finns ett <u>ortogonalt</u> variabel-byte $\bar{x} = P\bar{y}$ (dvs P ortogonal matris)

så att

$$\bar{x}^T A \bar{x} = \bar{y}^T D \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2,$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (med multiplicitet) är egenvärden till A, om

$P = [\bar{v}_1 \ldots \bar{v}_n]$ där $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$

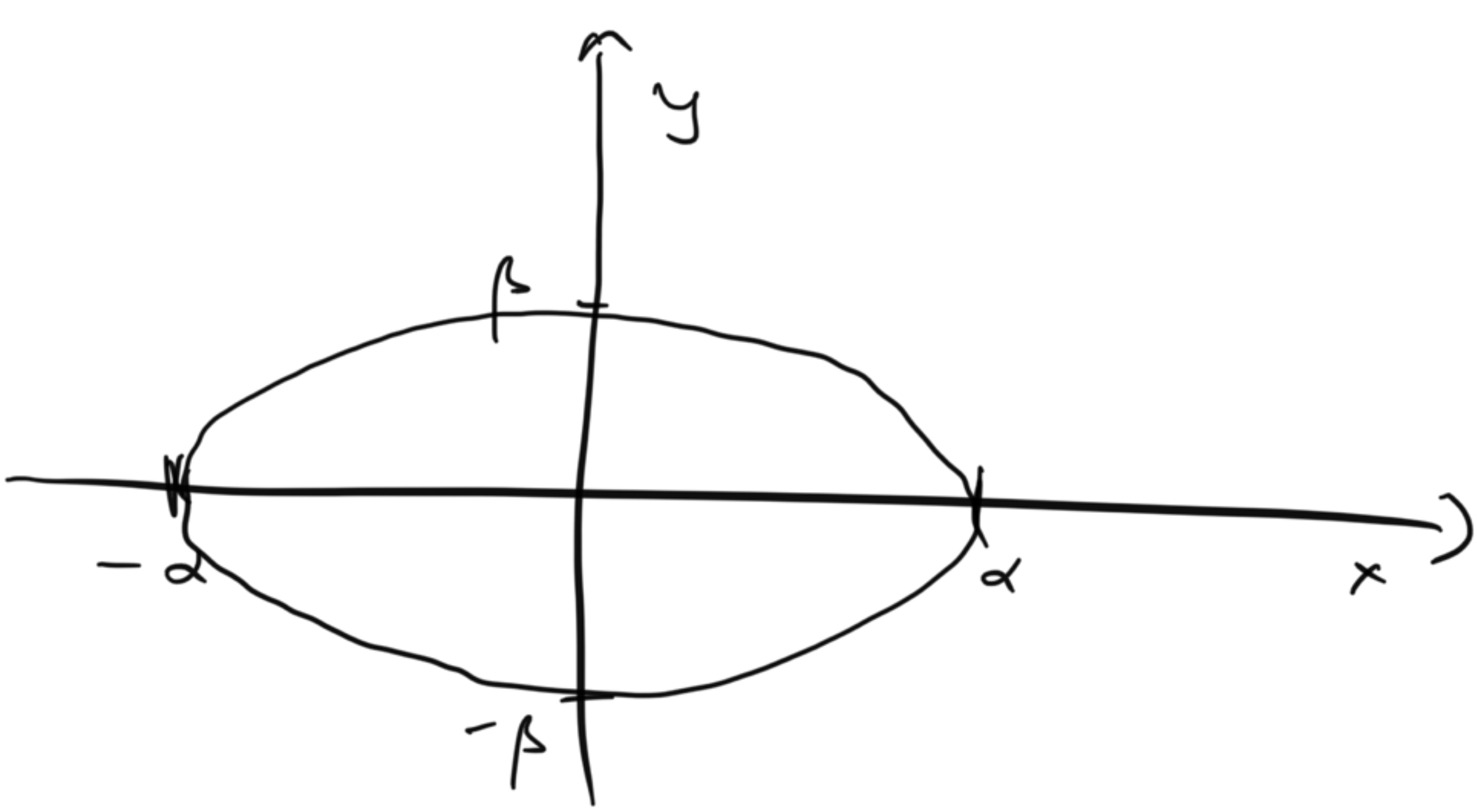
är motsvarande (ON-bas) av egenvektorer, dvs $A\bar{v}_i = \lambda_i \bar{v}_i$

Geometrisk tillämpning: "Kägelsnitt", i $\mathbb{R}^2$

hur ser $Q_A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 1$ ut? $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

<u>Ex 1</u> (utan korstermer!):

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \qquad (\alpha, \beta > 0)$$



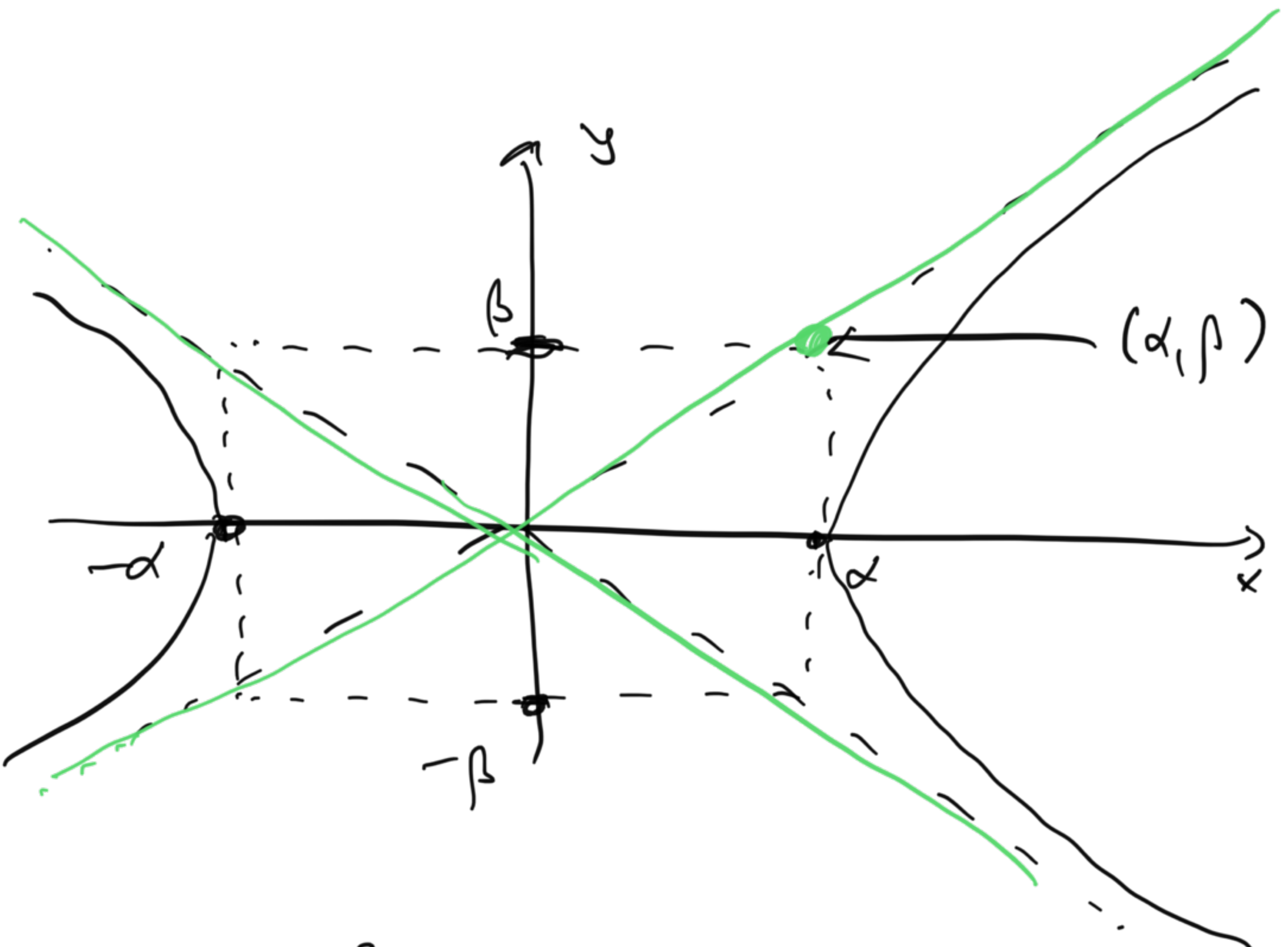
(cirkel om $\alpha = \beta$.).

Ex 2: $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$

$x^2 = 1 + y^2$

$\Rightarrow |x| \geq 1.$

hyperbel.

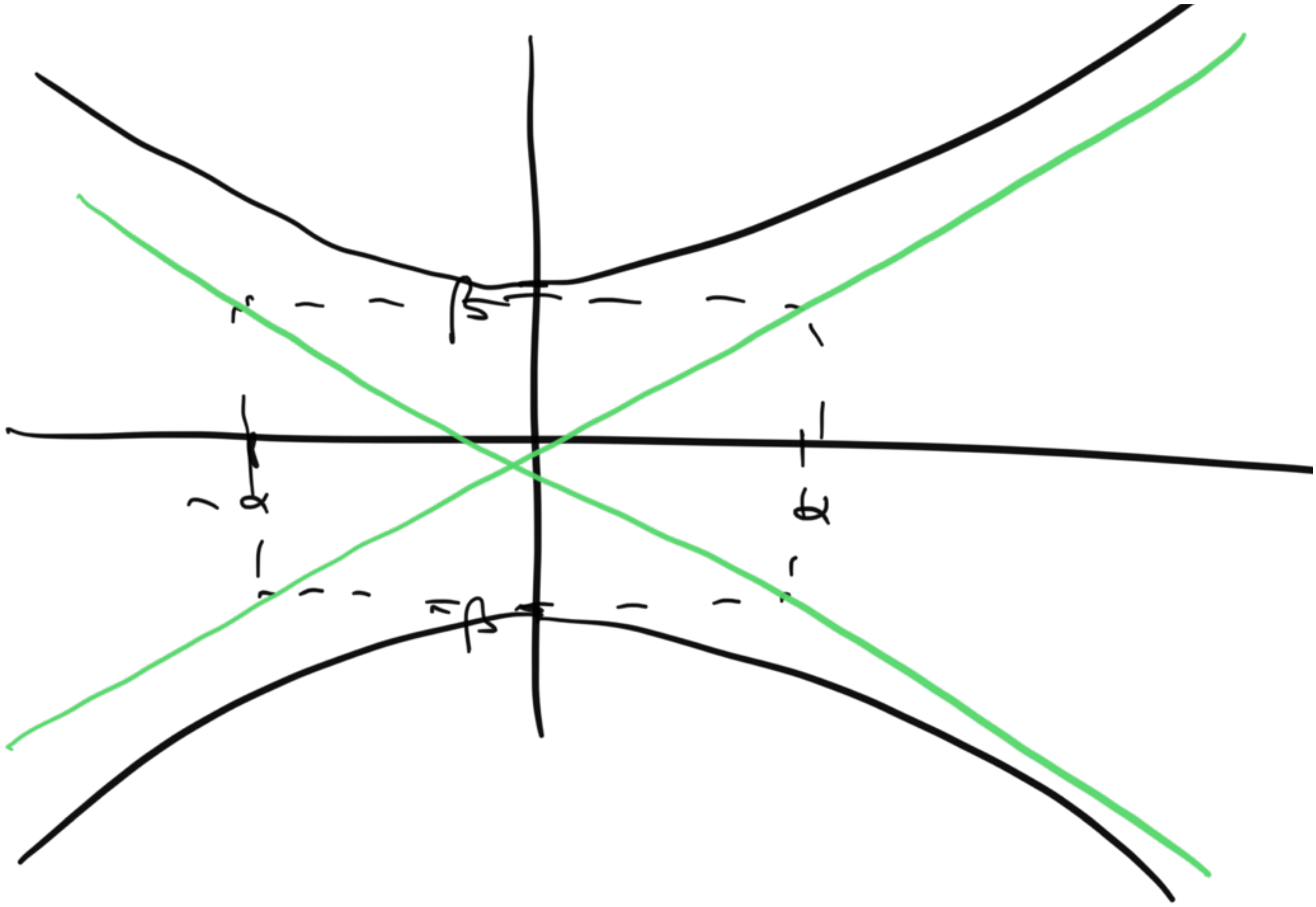


Ex $\dfrac{y^2}{\beta^2} - \dfrac{x^2}{\alpha^2} = 1$

$y^2 = 1 + x^2$

$|y| \geq 1.$

Hyperbel.



Bilder: inga korstermer!

Vad gör vi om korstermer förekommer?!

Poäng med variabelbyte: vi vrider ovanstående bilder!

Ex: $A = PDP^T$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$P = [\bar v_1 \;\; \bar v_2]_{*} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Hur ser $Q_A(\bar x) = 1$ ut?

Tag $\bar x = P\bar y \Rightarrow$

$$Q_A(\bar x) = \bar x^T A \bar x = \bar y^T P^T A P \bar y =$$

$$= \bar y^T D \bar y. = \bar y^T \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix} \bar y.$$

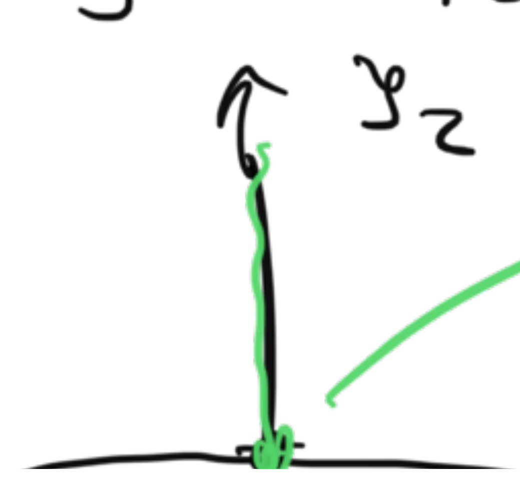
$\therefore$ Bild i $\bar y$-koordinater:

Uttryck: $Q_A(\bar x) = 1\cdot y_1^2 + 4\cdot y_2^2 = 1$

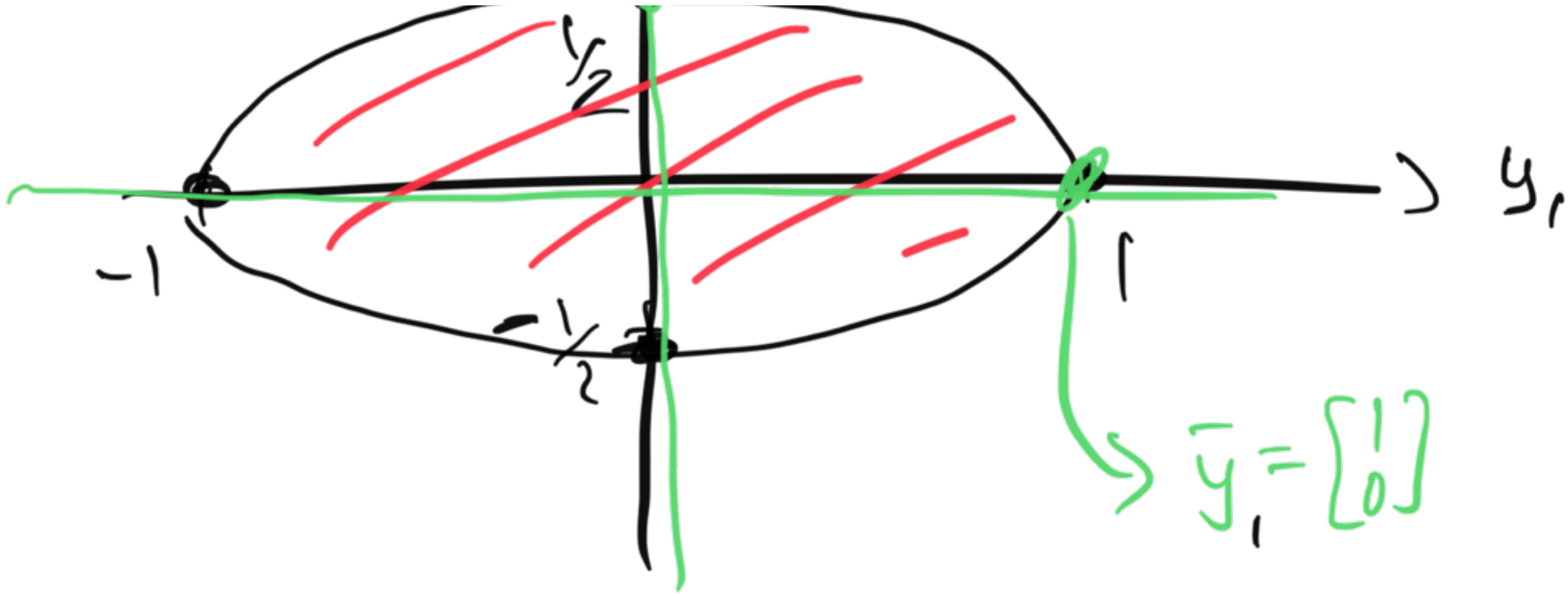
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$$

$$\frac{y_1^2}{1^2} + \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} y_2^2 = 1$$

Bild i $\bar y$-koord:



$\bar y_2 = \begin{bmatrix}0\\ 1/2\end{bmatrix}.$



Nu kan vi gå tillbaks till $\bar{x}$-bild:

$$\bar{x} = P\bar{y}$$

$$\bar{x}_1 = P\bar{y}_1 = P \cdot \bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{v}_1$$

$$\bar{x}_2 = P\bar{y}_2 = P \cdot \left(\tfrac{1}{2}\bar{e}_2\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\bar{v}_2$$

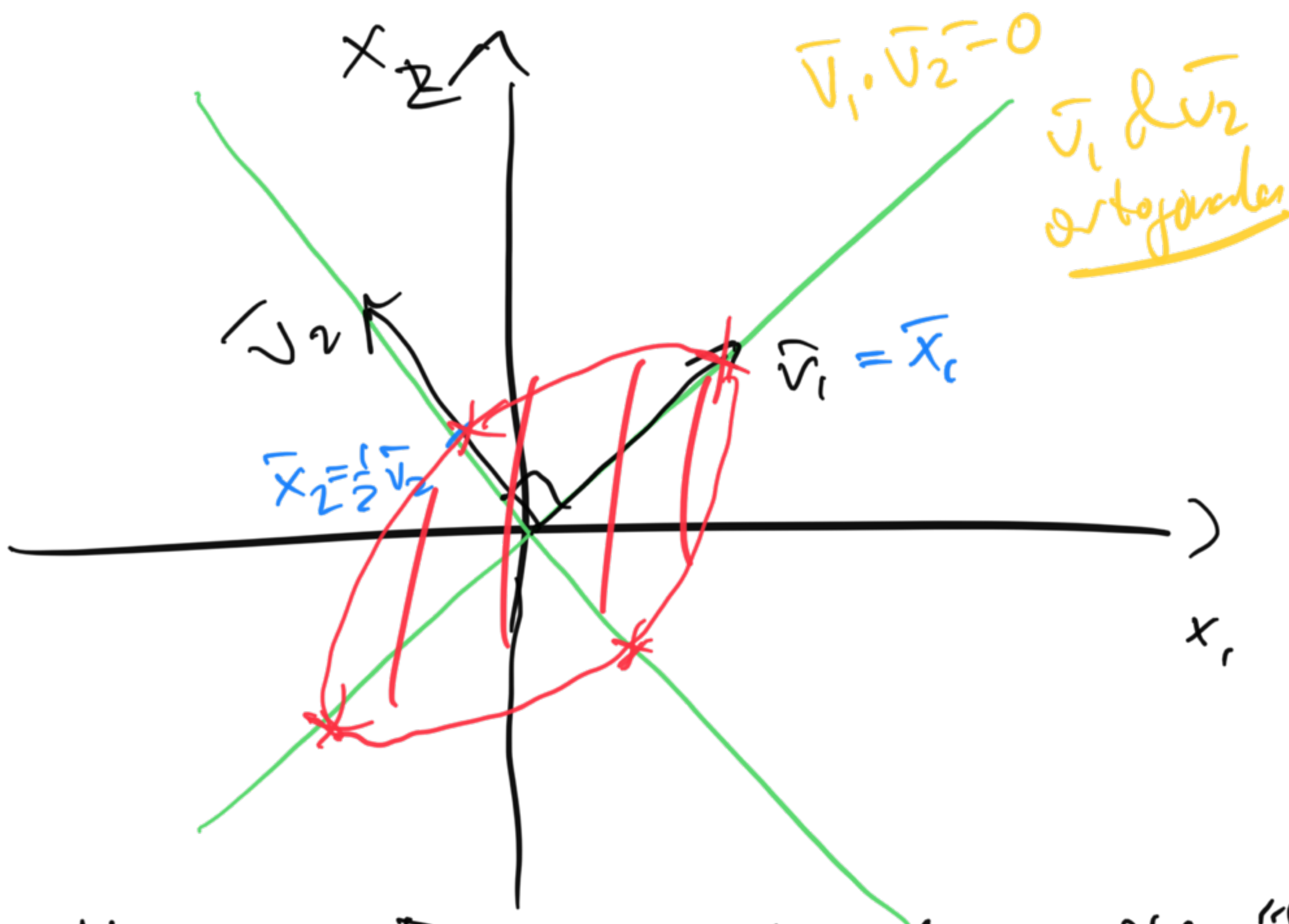


Bild av $\bar{x}^T A \bar{x} = 1$: "vrid $\bar{y}$-bilden"!

Ö: Vad blir A? (Har korstermer)

Q: Om A är 3x3, hur rita hjälpvariabler?

$$A = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 2 & 3 \\ x_2 & 2 & 0 & 0 \\ x_3 & 3 & 0 & 1 \end{array}$$

(alt: $x\ y\ z$ istf. x_1, x_2, x_3)

$$1 \cdot x_1^2 + 2 \cdot x_2 x_1 + 2 \cdot x_1 x_2$$
$$+ 3 \cdot x_3 x_1 + 3 \cdot x_1 x_3 + 1 \cdot x_3^2.$$
$$= x_1^2 + 4 x_1 x_2 + 6 x_1 x_3 + x_3^2.$$

min/max: hitta x : $f'(x) = 0$

Max: $f'' > 0$

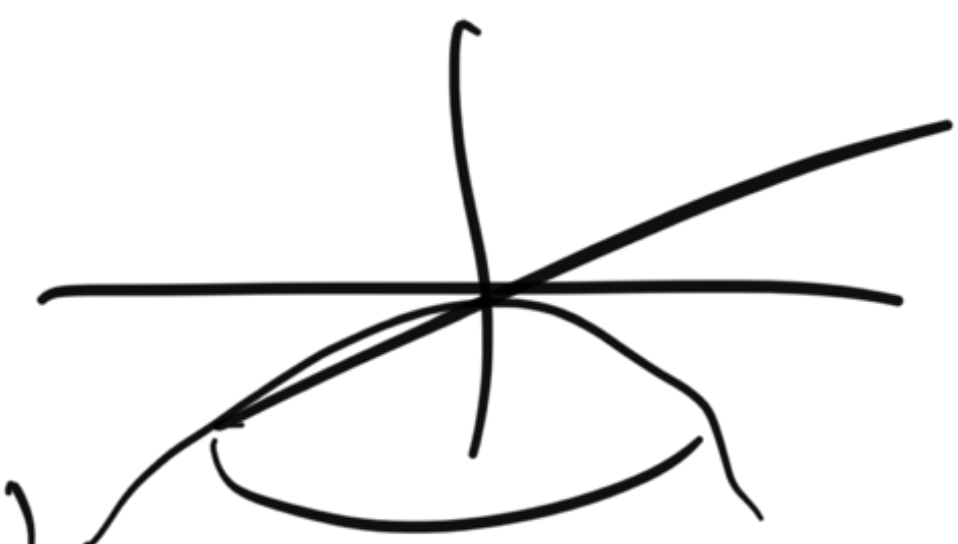
min $f'' < 0$

min/max i flera variabler?

x^2+y^2

min i $(0,0)$

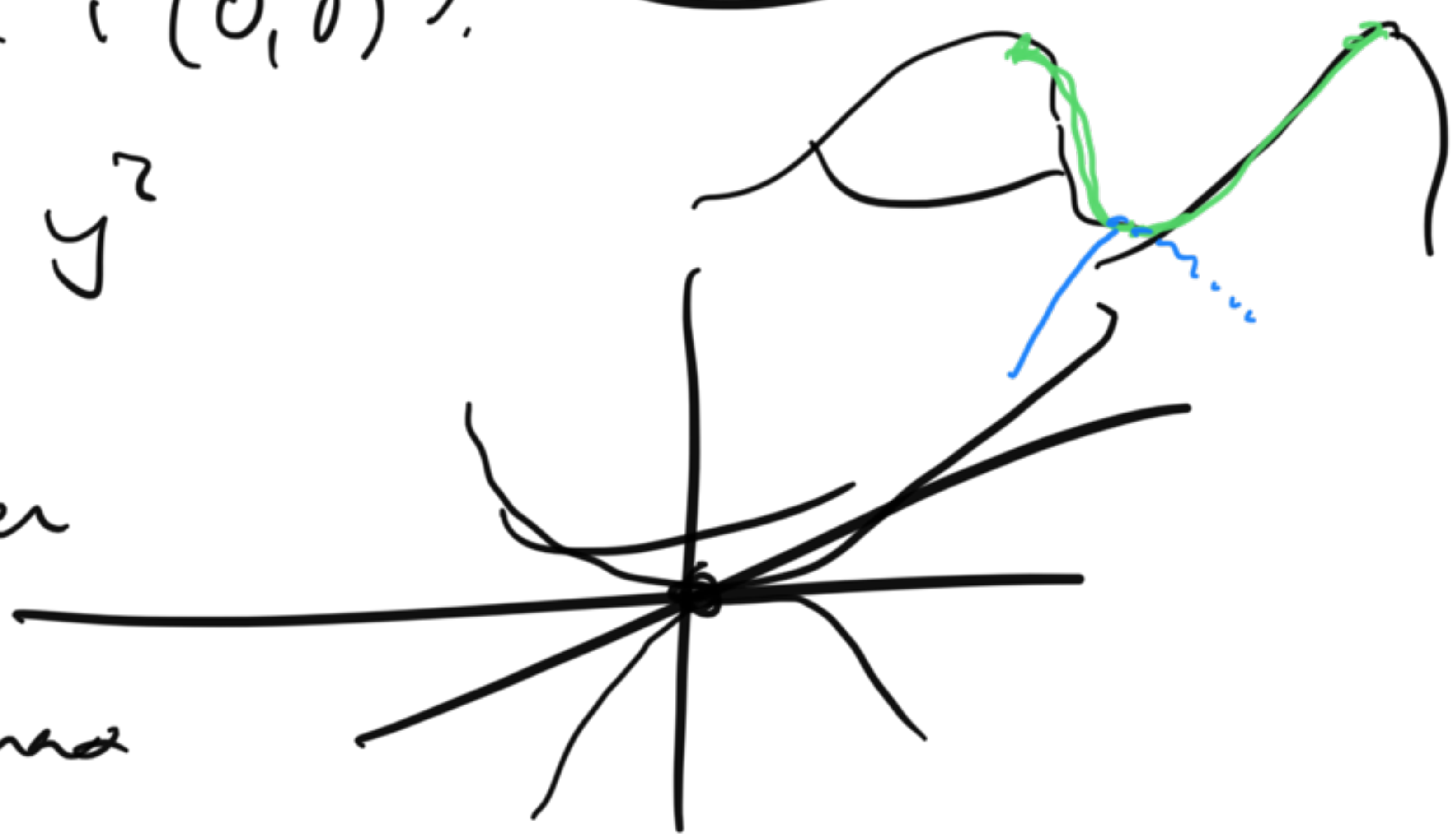
$-(x^2+y^2)$



max i $(0,0)$

x^2-y^2

varken min eller max



<u>Def</u>: En kvadratisk form

$$Q(\bar{x}) = Q_A(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}$$

är

($\Leftrightarrow$ min)

- positivt definit om
  $$Q(\bar{x}) > 0 \text{ för } \bar{x} \neq \bar{0}.$$

($\Leftrightarrow$ max)

- negativt definit om
  $$Q(\bar{x}) < 0 \text{ för } \bar{x} \neq \bar{0}.$$

varken min/max

- indefinit om Q tar både positiva & negativa värden.

Sats: 8.4.3 Låt A vara en symmetrisk $n \times n$ matris med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (med multiplicitet).

a) $\bar{x}^T A \bar{x}$ pos. def. $\Leftrightarrow \lambda_i > 0 \ \forall i.$

b, $\bar{x}^T A \bar{x}$ neg. def $\iff \lambda_i < 0 \ \forall i$

c, $\bar{x}^T A \bar{x}$ är indefinit $\iff$

olika tecken på egenvärden förekommer: $\exists j, k$

så att $\lambda_j < 0,\ \lambda_k > 0$.

Ex: $x^2 + y^2$: pos. def. $\underset{A}{=} D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$-x^2 - y^2$: neg. def. $\underset{A}{=} D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$x^2 - y^2$: indef. $\underset{A}{=} D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Sats 8.4.4: Låt A vara symmetrisk 2×2 matris, och betrakta kurvan $Q_A(\bar{x}) = 1$.

a, $Q_A(\bar{x}) = 1$ är ellips (cirkel) om A är pos. definit.

b) $Q_A(\bar{x}) = 1$ har ingen punkter!

om A är negativt definit.

c) $Q_A(\bar{x}) = 1$ är hyperbel

om A är indefinit.

---

b): Ex: $-x^2 - y^2 = 1$.

$-(x^2+y^2) \leq 0$

Ex: Om $D = P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = -1$

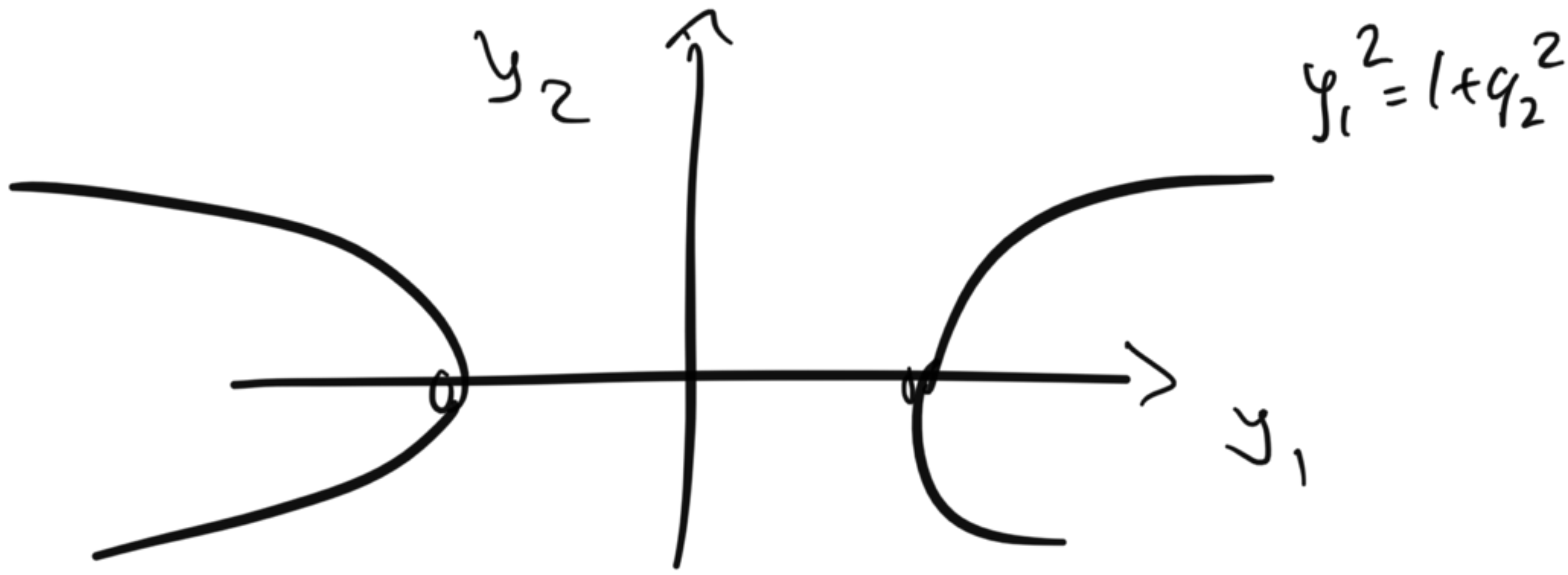
$\Longrightarrow$ A indefinit.

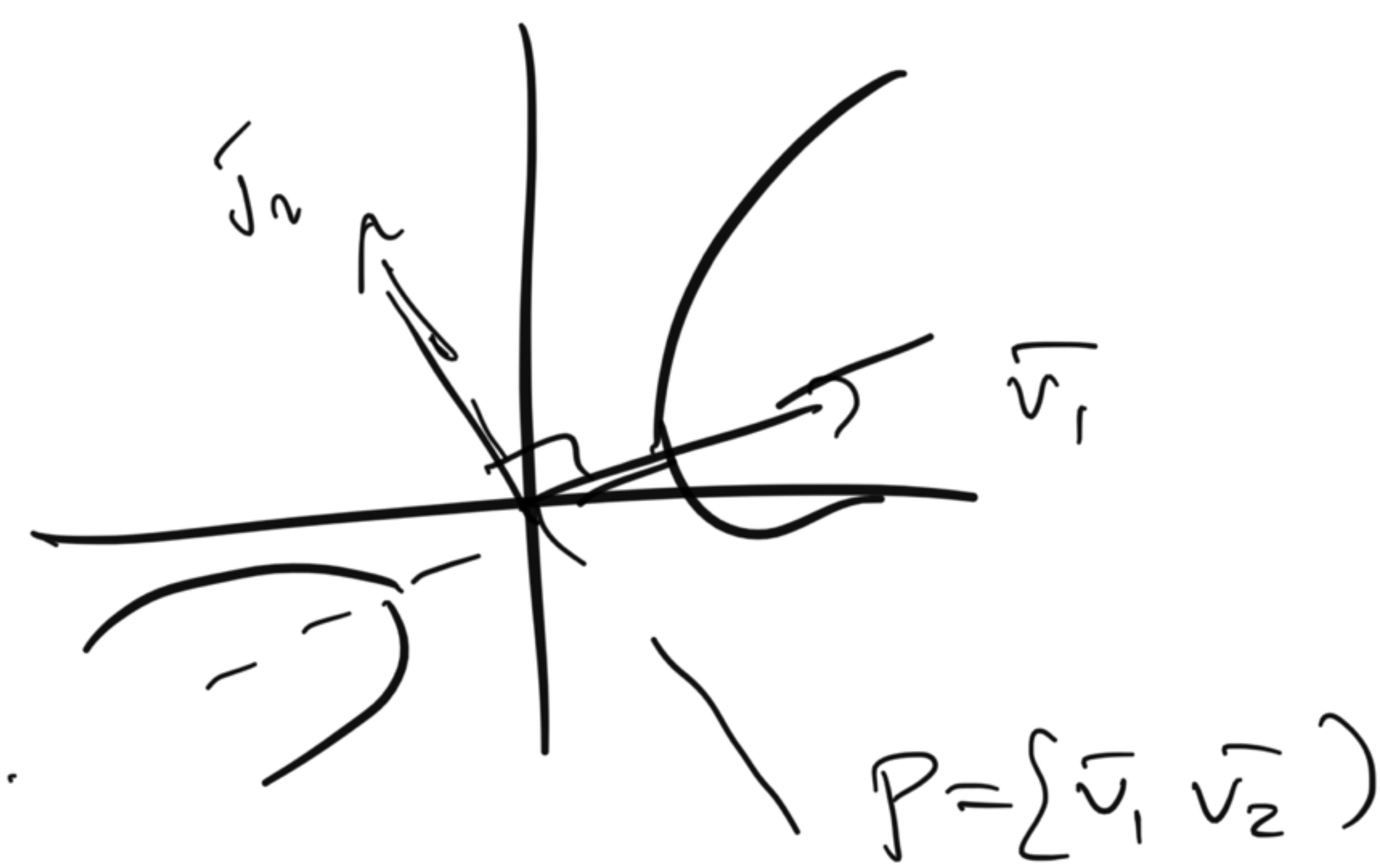
$\bar{x} = P\bar{y} \Longrightarrow \bar{x}^T A \bar{x} = 1$

$\Updownarrow$

$\bar{y}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \bar{y} = 1$

dvs $y_1^2 - y_2^2 = 1$,





Sats 8.4.5 + 8.4.6 :

läs själva!

(...

(Positivt definit symmetrisk
matris : alla egenvärden
> 0.

Cool: A pos. definit

$\Longrightarrow \exists B : B^2 = A$.

"det existerar"

(Dvs kan ta kvadrat-
roten ur pos. def.