

8.3 Orthogonal diagonalisering +

"matrisfunktioner"

Rep: A & C är similära

Om $\exists P$ så att $C = P^{-1}AP$.

Def: A & C är ortogonalt

similära om det finns en

ortogonal matris P så att

$$C = P^{-1}AP = P^TAP$$

(ty P ortogonal $\Rightarrow P^{-1} = P^T$).

Sats 8.3.2: A och C

ortogonalt similära $\Leftrightarrow$

det finns två ON-baser
 B_1, B_2 så att

$$[A]_{B_1} = [C]_{B_2}$$

Bevis: ö! (se boh.?)

Orthogonal diagonalisering:

givet $n \times n$ matris A , hitta
orthogonal matris P så att

$$D = P^T A P = P^{-1} A P$$

är diagonal.

Sats 8.3.3: A är ortogonalt

diagonaliserbar $\Leftrightarrow$

Kan hitta ON-bas $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$

av eigenvektorer för A .

(Dvs: $A\bar{v}_i = \lambda_i \bar{v}_i$, och
kan då ta:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}, P = [\bar{v}_1 \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n]$$

Anm: B ON-bas $\Rightarrow P$ ortogonal.

Bevis av $\Leftarrow$: Låt $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$

vara ON-bas av egenvektorer.

(Dvs: $A\bar{v}_i = \lambda_i \bar{v}_i$). Bilda

$$P = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n], \text{ och } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Notera: $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow$

$$PD = AP. \text{ Sätter nu } v_i \text{ och } H_i$$

(OBS: viktig räkning!)

$$VL: P \cdot D = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\lambda_1 \bar{v}_1) & (\lambda_2 \bar{v}_2) & \dots & \lambda_n \bar{v}_n \end{bmatrix}$$

$$HL: A \cdot P = A \cdot [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n] = [A\bar{v}_1 \mid A\bar{v}_2 \mid \dots \mid A\bar{v}_n]$$

$$= \begin{bmatrix} (\lambda_1 \bar{v}_1) & (\lambda_2 \bar{v}_2) & \dots & (\lambda_n \bar{v}_n) \end{bmatrix}.$$

Hurra! $VL = HL$ Klar!

Sats 8.3.4. ("Spektralsatsen").
viktigt

a) A är ortogonalt diagonaliserbar

$$\Leftrightarrow A^T = A.$$

b) Om $A^T = A$, $A\bar{v}_1 = \lambda_1 \bar{v}_1$,

$A\bar{v}_2 = \lambda_2 \bar{v}_2$ och $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\text{Så är } \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0.$$

(dvs: ^{egen}vektorer tillhörande olika egenvärden automatiskt ortogonala!).

Beweis: (b) Notera först att

$$\bar{v}_1 \cdot (A \bar{v}_2) = \bar{v}_1^T \cdot (A \bar{v}_2) =$$

$$(\bar{v}_1^T \cdot A) \bar{v}_2 = (A^T \bar{v}_1)^T \cdot \bar{v}_2 = (A^T \bar{v}_1) \cdot \bar{v}_2$$

(gäller för alla A).

$$\text{Men: } A^T = A \Rightarrow \bar{v}_1 \cdot (A \bar{v}_2) = (A \bar{v}_1) \cdot \bar{v}_2$$

Dessutom: $\bar{v}_1$ & $\bar{v}_2$ är egenvektorer

$$\Rightarrow \bar{v}_1 (\lambda_2 \bar{v}_2) = (\lambda_1 \bar{v}_1) \cdot \bar{v}_2$$

$$\Rightarrow \lambda_2 (\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2) = \lambda_1 (\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2)$$

$$\text{och } \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow$$

$$0 = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} (\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2)$$

$$\Rightarrow \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0$$

Dus $\bar{v}_1$ & $\bar{v}_2$ orthogonal.
KLART!

$$\textcircled{1} \quad (AB)^T = B^T A^T$$

$$\textcircled{2} \quad (A^T \bar{v}_1)^T = \bar{v}_1^T (A^T)^T = \bar{v}_1^T A$$

$$\textcircled{3} \quad (A^T)^T = A$$

$$a) \Rightarrow: \quad 0_m \quad D = P^{-1} A P$$

$$\Rightarrow \quad P D P^{-1} = A = P D P^T$$

Note na uu:

$$A^T = (P D P^T)^T = (P^T)^T \cdot D^T \cdot P^T$$

$$= P D^T \cdot P^T = P D P^T = A$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{ty: } D^T = D \\ \text{ex: } \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \end{array} \right]$$

$$\therefore A^T = A. \quad \text{Klart!}$$

a) $\Leftarrow$: knepigare, se
 "boken med kossan p₀".
 (se chat).

"Recept" för ortogonal diagonalisering

① Hitta egenvärden

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$

(obs: A $n \times n$ och $k \leq n$
helt ok!),

dvs finns rötter till $\det(\lambda I - A) = 0$.

② För varje egenvärde
 λ_i , finna egenrummet

$$W_i = \{ \bar{x} : (\lambda_i I - A)\bar{x} = \bar{0} \}$$

$\leadsto$ hitta bas för W_i

③ För varje bas för W_i ,
kör Gram-Schmidt

$\leadsto$ ~~för~~ ON-bas B_i
för W_i

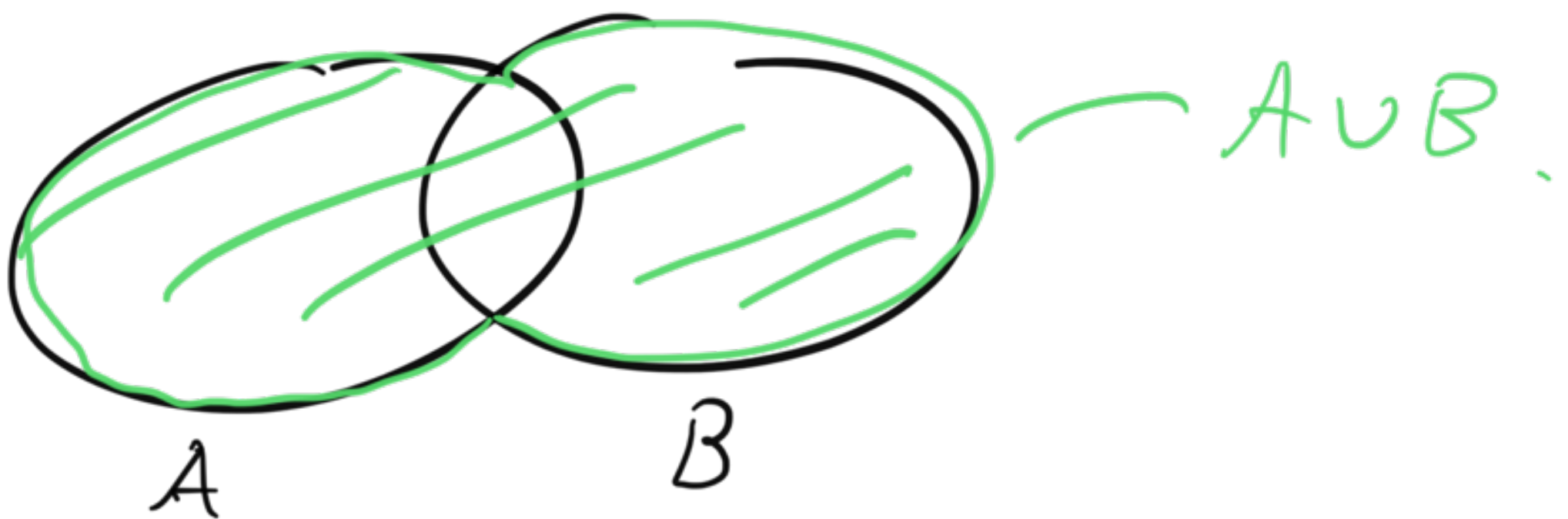
④ "Lämma ihop" $B_1, B_2, \dots, B_k$
till "mega bas", dvs ~~bas~~

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n.$$

↑
"union".

A, B mängder:

$$A \cup B = \{x \text{ s.d. att } x \in A \text{ eller } x \in B\}.$$



Anm: Sats 8.3.4 b) ger
att vektorer w_i & w_j

(om $i \neq j$) automatiskt
är ortogonala!

Nästan klara (POST!)

(5) Om vi vill hitta P :

$$1^{\text{st}} \quad B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\},$$

$$\text{tag sedan } P = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_n].$$

Klara! :)

(Ex kommer!).

$$\text{"Limme": } \underline{E_x}: B_1 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$$

$$B_2 = \{\bar{v}_3\}.$$

$$B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}.$$

Rep (katt)! egen rum

(tillhörande λ_j):

är: $\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : (\lambda_j I - A) \bar{x} = \vec{0} \}$

(dvs lösning till homogent
system).

Anm: Om A har n

stycken olika egenvärden

är $\dim(W_i) = 1$ för $i=1, \dots, n$,

dvs vi slipper köra full

Gram-Schmidt, det

räcker att normalisera.

$$\# \vee (2 \ 2 \ 1) \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

$$\underline{L_1} \quad (0.7.1) \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}'$$

bitte orthogonal matrix P so

att $P^T A P = D$. (Anm: $A^T = A$.)

1. Eigenvärden:

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 8)^1$$

$$\Rightarrow \lambda = 2 \quad \& \quad \lambda = 8$$

är eigenvärden.

$$m_a(2) = 2$$

$$m_a(8) = 1$$

$$m_g(2) = 2$$

$$m_g(8) = 1$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Sats: } A^T = A \\ \Rightarrow A \text{ diagonalt} \\ \Rightarrow m_g = m_a \\ \forall \text{ eigenvärden} \end{array} \right)$$

2a) Lös $(2 \cdot I - A) \bar{x} = \bar{0}$

~~~~~> das ges an

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad W_1 = \text{Span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$$

(Rechenanalog:  $\bar{x} = t_1 \cdot \bar{v}_1 + t_2 \cdot \bar{v}_2$

~~~~~>  $\bar{v}_1$  &  $\bar{v}_2$  bas  
für vollrannet.).

2b, Lös $(8 \cdot I - A) \bar{x} = \bar{0}$

~~~~~> das ges an  $\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$   
 $W_2 = \text{Span}(\bar{v}_3)$

3, "Putsa"  $\bar{v}_1$  &  $\bar{v}_2$  in  $W_2$   
Gram-Schmidt: (putsa  $W_1$ ).

$$\bar{w}_1 = \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{w}_2 = \bar{v}_2 - \frac{\bar{v}_2 \cdot \bar{w}_1}{|\bar{w}_1|^2} \cdot \bar{w}_1 = \dots = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(Tips: kolla att  $\bar{w}_1 \cdot \bar{w}_2 = 0$ .)

4, Putsa längd:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{|\bar{w}_1|} \cdot \bar{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

och:

$$\bar{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

---

$$\therefore B = \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3 \} =$$

$$= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

är ON-bas (av egenvektorer)

Låt sedan  $P = [\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \bar{u}_3];$

då är  $P$  ortogonal

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Crazy:  $P = [\bar{u}_1 \ \bar{u}_3 \ \bar{u}_2]$

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(??)

$$A P = P D$$

$$P = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n]$$

$$\begin{aligned} AP &= A \cdot [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n] = \\ &= [A\bar{v}_1 \dots A\bar{v}_n] = [\lambda_1 \bar{v}_1 \dots \lambda_n \bar{v}_n] \end{aligned}$$


---

"Spektral uppdelning":  
 $P = [\bar{u}_1 \dots \bar{u}_n]$

Se bok.

$$A = A^T, \quad A = P D P^{-1} = P D P^T$$

$$\longrightarrow A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{u}_i \cdot \bar{u}_i^T$$

1 tillämpning:

om  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots |\lambda_n|$

kan vi "kasta" små  $\lambda_i$

1 10 - 1

och så approximation  
av  $A$ :

$$A \approx \sum_{i=1}^5 \lambda_i \bar{u}_i \cdot \bar{u}_i^T.$$

("low rank approximation",  
"compressed sensing").

---

Matrispotenser via diagonalisering

Ex: Låt  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Finn  $A^5$ . (eller  $A^{10}$ ).

"Dåligt sätt":  $A^5 = A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A$

(multiplicera po).

"Dåligt sätt":  $A^5 = (A^2) \cdot (A^2) \cdot A$

Bättre:  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$   
 $\uparrow \quad \nearrow$   
 räknas bara en gång!

"Bäst" (om  $A$  diagonaliserbar)

$$A = P D P^{-1} \text{ med } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \boxed{P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

Pröv:  $A^2 = A \cdot A = (P D \cancel{P^{-1}}) (\cancel{P} D P^{-1})$

$$= P D \cdot D \cdot P^{-1} = P D^2 \cdot P^{-1}$$

Aha!  $D^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 1^2 \end{bmatrix}$

och:  $D^5 = \begin{bmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & 1^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^5 = \underset{\substack{\nearrow \\ P}}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\substack{\nearrow \\ D^5}}{\begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\substack{\nearrow \\ P^{-1}}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$\text{Ex: } A^{10} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(Anm: Google används detta!)

---

$$A^3 = (\cancel{P} \underline{D} \cancel{P}^{-1}) (\cancel{P} \underline{D} \cancel{P}^{-1}) (\cancel{P} \underline{D} \cancel{P}^{-1}) =$$

$$= P \cdot D \cdot D \cdot D \cdot P^{-1} = P D^3 \cdot P^{-1}.$$

$$A^4 = \dots$$

$$A^5 = \dots$$

$$\nRightarrow A^k = P \cdot D^k \cdot P^{-1}.$$


---

Sats 8.3.5 ("Caley-Hamilton")

Samt (tex)  $e^A$  om

$A$  är matris:

(Se bok!)

(CooIt:  $\sqrt{A}$  om  
 $A$  matris !? ).

---

$A$  diagonaliserbar

$\Leftrightarrow$  kan hitta bas  
av eigenvektorer.

$\Leftrightarrow$  kan hitta  $n$  st.  
oberoende egenvektorer.)

---

Ide:  $B = \{ \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \}$  (s)

av egenvektorer. ( $A \bar{v}_i = \lambda_i \bar{v}_i$ )

Ta  $\mathbb{R}$   $\mathbb{C}$   $\mathbb{H}$   $\mathbb{O}$   $\mathbb{S}$

$$P = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n]$$

(bas  $\Rightarrow$   $P$  invertierbar!?)

Vollst. hat:  $P^{-1}AP = D$

$$AP = PD$$

$$A = PDP^{-1}$$

Hier/unter steht? Sehen!

$$f(x) = \sum a_n x^n$$

$S^0$  (brutal!) definieren  $v_i$   
( $A$   $n \times n$  matrix)

$$f(A) = \sum a_n A^n$$

$$F_x: f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

$$e^A //$$

Men: or  $A$  diagonalisierbar

$$\Rightarrow A = P D P^{-1}$$

$$\Rightarrow A^k = P D^k P^{-1}$$

$$\Rightarrow e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P D^k P^{-1}}{k!}$$

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

$$= P \left( \sum \frac{D^k}{k!} \right) P^{-1}$$

$$= P \left( \sum \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \right) P^{-1} =$$

$$= P \left( \begin{bmatrix} \sum \frac{\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{bmatrix} \right) P^{-1}$$

$$= P \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & e^{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$\text{On } f(x) = \sum a_k x^k$$

$$\Rightarrow f(A) = P \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$y' = a \cdot y \Rightarrow y(t) = e^{a \cdot t} \cdot y_0$$

$$(y(0) = y_0).$$

~~Matrix~~ Vektor  $v$  und  $A$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{y}(t) \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ \bar{y}' = A \cdot \bar{y} \end{aligned} \right.$$

Lösung 1)  $\bar{y}' = A \bar{y},$   
 $\bar{y}(0) = \bar{y}_0$

ges w:  $\left( e^{A \cdot t} \right) \cdot \bar{y}_0$