

8.1 Linjära avbildningar och deras matriser

Kom ihåg: en linjär avbildning

$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ges av

standardmatrisen $[T] =$

$$[T(\bar{e}_1) \ T(\bar{e}_2) \ \dots \ T(\bar{e}_n)]$$

("följ enhetsvektorerna").

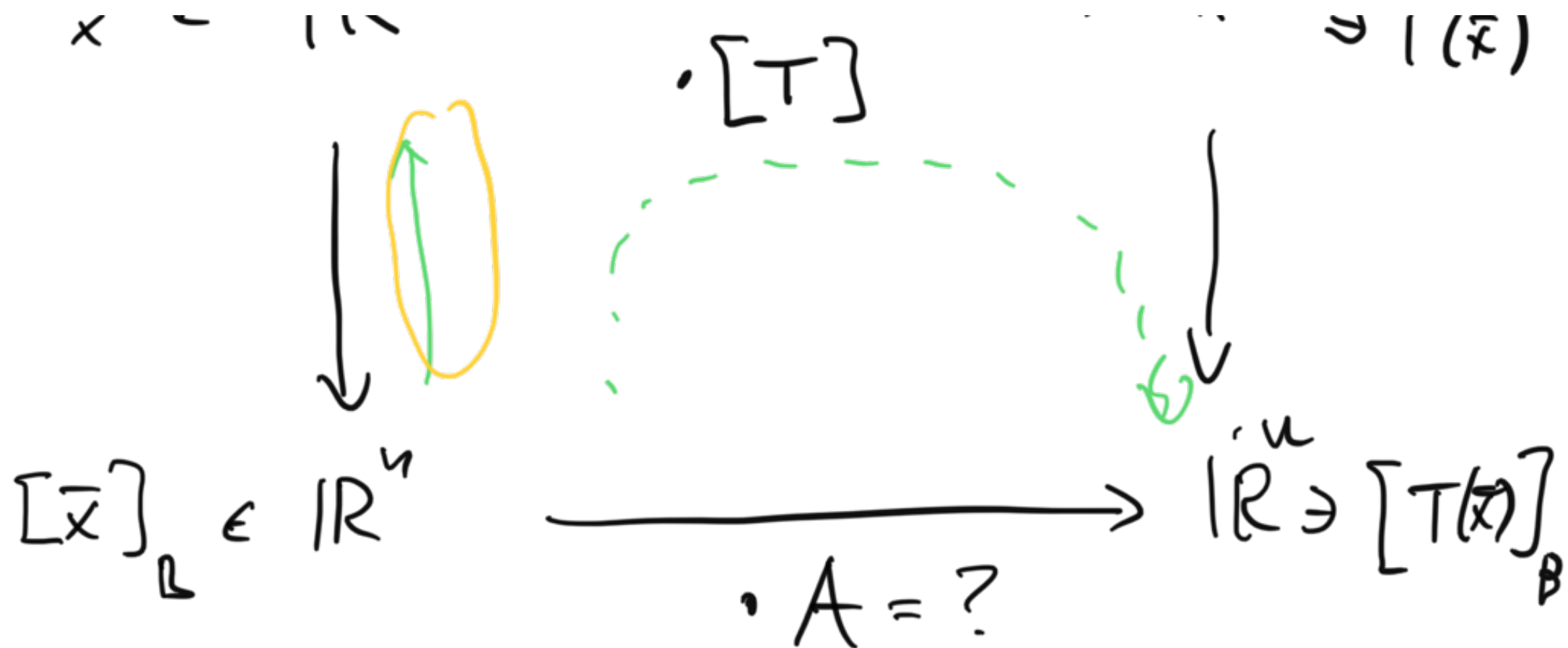
Dvs: ges en matris A

att $T(\bar{x}) = [T] \cdot \bar{x}$.

Vad händer om vi byter bas?

(Från standardbas till B).

$$- \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\quad}$$



Provj: finna A s. att $[T(\bar{x})]_B = A \cdot [\bar{x}]_B$.

Sats 8.1.1: Låt $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

vara linj. avbildning, och låt

$B = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \}$ vara bas
för $\mathbb{R}^n$.

Om vi låter

$$A = \begin{bmatrix} [T(\bar{v}_1)]_B & \dots & [T(\bar{v}_n)]_B \end{bmatrix}$$

$$\text{Så är } [T(\bar{x})]_B = A \cdot [\bar{x}]_B.$$

"följ basvektornas".

Anm: Matrisen A kallas för
"matrisen för T i basen B "
och skrivs kort som
 $[T]_B$. ("T i basen B ").

Ex: Låt $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara
linj. avbildning med standard
matris $[T] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

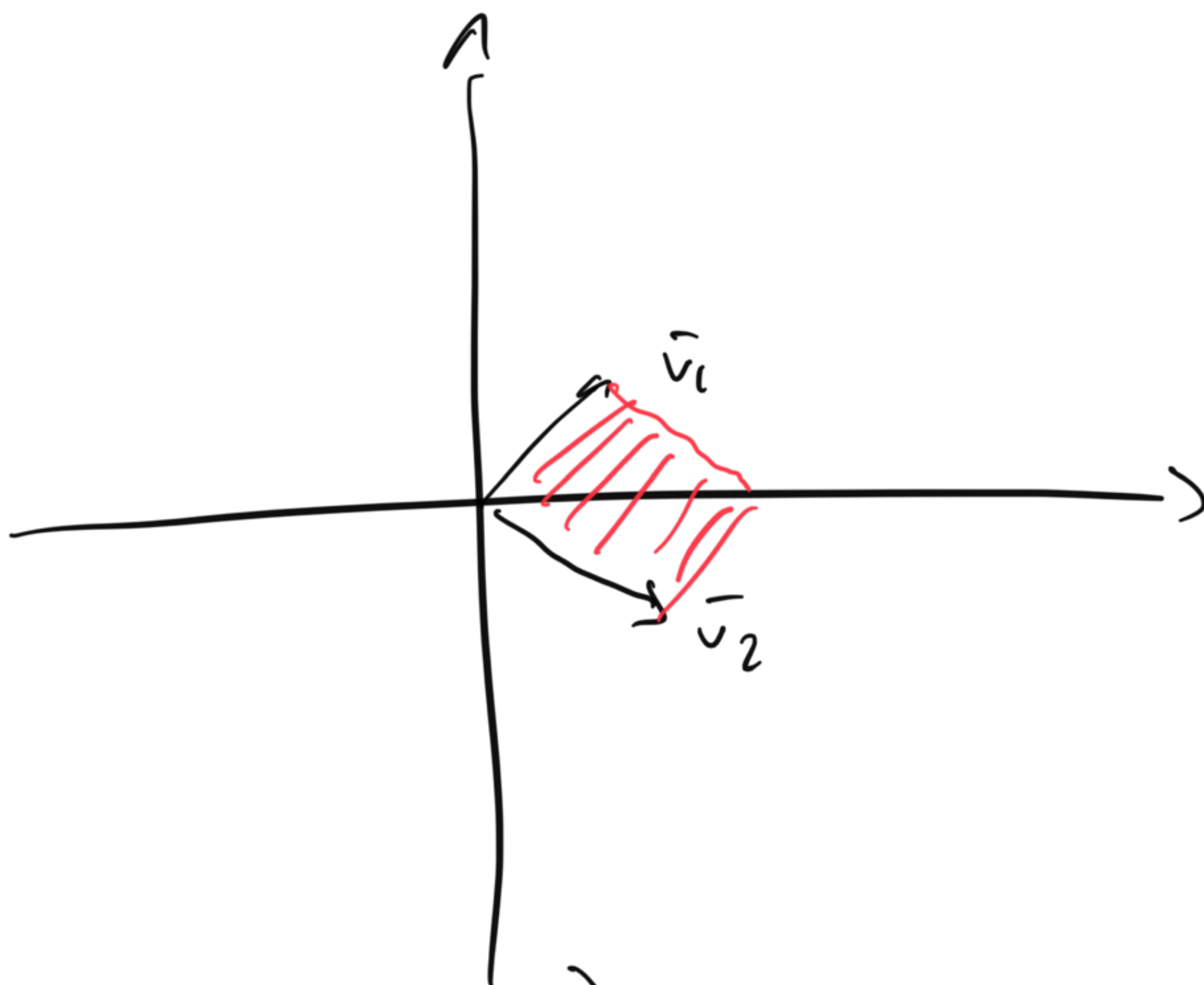
Finns $[T]_B$ då $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$
och $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ & $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Vi ser: $T(\bar{v}_1) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \cdot \bar{v}_1 + 0 \cdot \bar{v}_2$

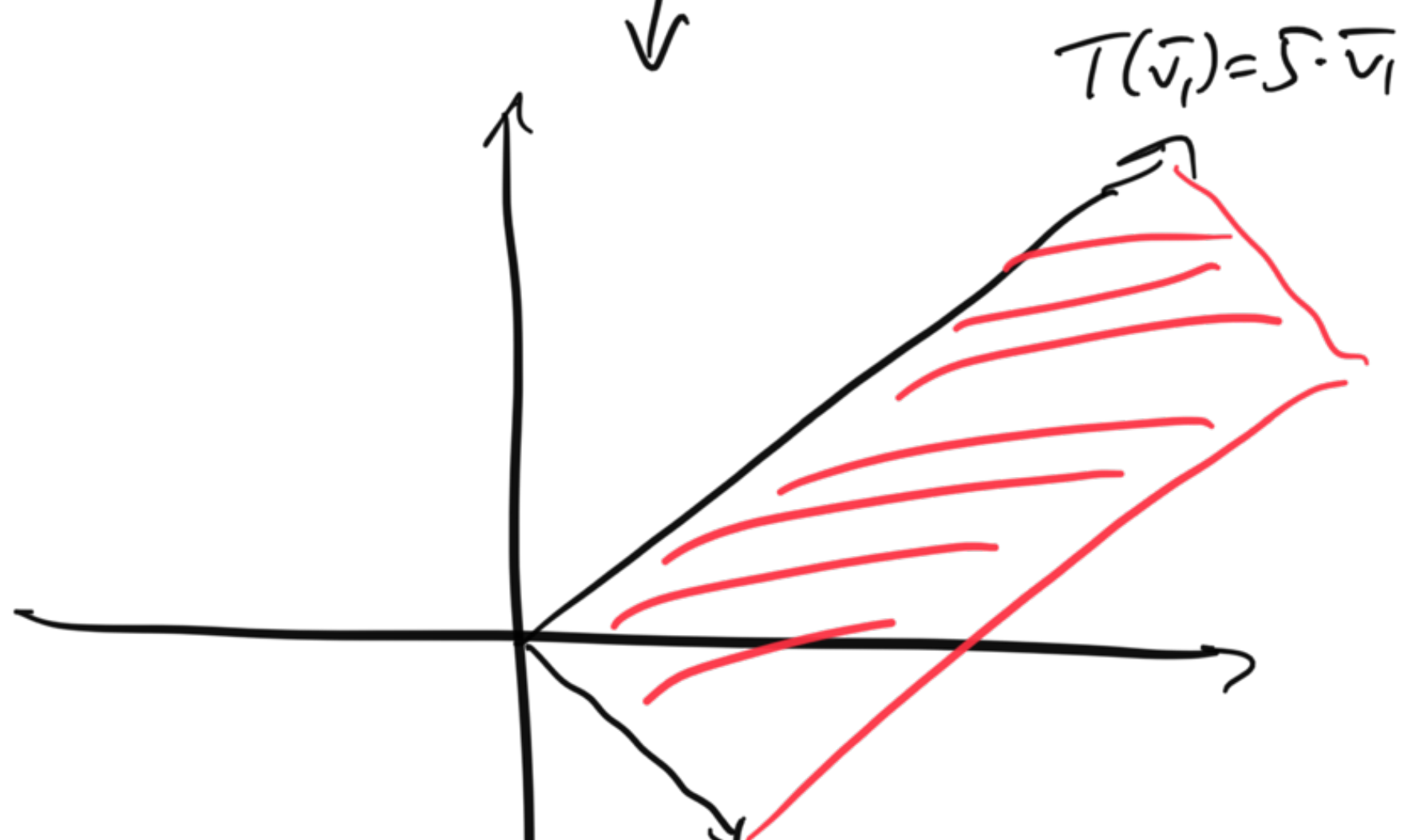
$T(\bar{v}_2) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \bar{v}_1 + 1 \cdot \bar{v}_2$

$\therefore [T]_B = \begin{bmatrix} [T(\bar{v}_1)]_B & [T(\bar{v}_2)]_B \end{bmatrix} =$

$$U = \begin{bmatrix} \text{green circle} & \text{blue circle} \\ 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



T



$$T(v_2) = v_2$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 + 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

↓ basbyte!

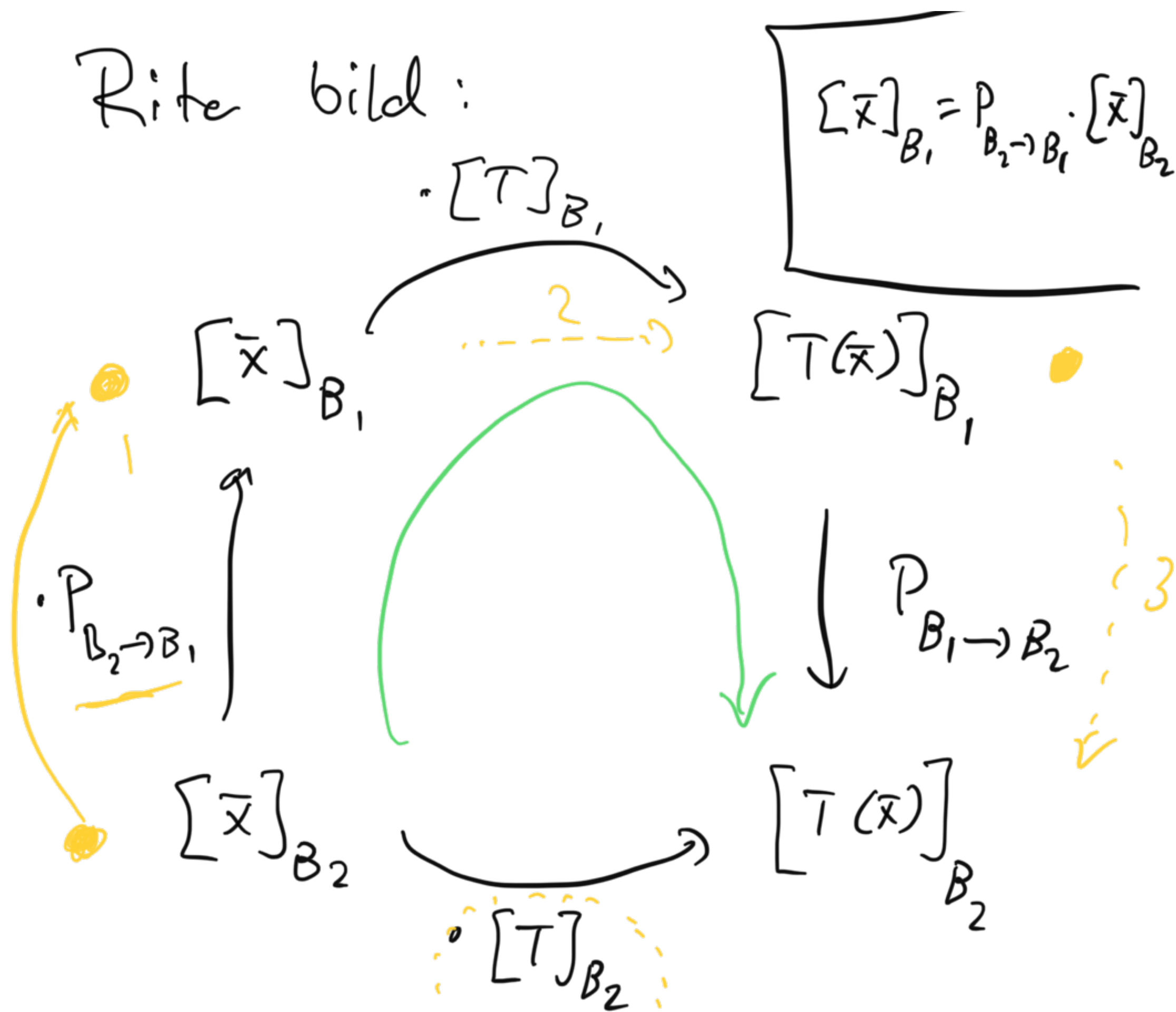
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = 5 \cdot y_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = 1 \cdot y_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(lös var för} \\ \text{sig med} \\ \text{evarve!)} \end{array}$$

Relation mellan

$[T]_{B_1}$ & $[T]_{B_2}$ där

B_1 & B_2 olika baser?

Rite bild:



$$\therefore [T]_{B_2} = P_{B_1 \rightarrow B_2} \cdot [T]_{B_1} \cdot P_{B_2 \rightarrow B_1}$$

Aum: Om vi skriver $P = P_{B_1 \rightarrow B_2}$

Så är $P_{B_2 \rightarrow B_1} = P^{-1}$ och

vi får:

$$(*) \quad [T]_{B_2} = P \cdot [T]_{B_1} \cdot P^{-1}$$

(se Sats 8.1.2.).

Anm: Om B_1 & B_2 är ON-baser

så är P ortogonal, dvs

$$P^{-1} = P^T, \text{ och } (*) \text{ blir då}$$

$$[T]_{B_2} = P \cdot [T]_{B_1} \cdot P^T.$$

Viktigt specialfall:

$$B_2 = S \quad (\text{standardbasen } S = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}).$$

$$\text{dvs } [T]_{B_2} = [T]_S = [T]$$

$$\text{och } P_{B_1 \rightarrow B_2} = P_{B_1 \rightarrow S} =$$

$$[[\bar{v}_1]_S \quad [\bar{v}_2]_S \quad \dots \quad [\bar{v}_n]_S] =$$

$$[\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \dots \quad \bar{v}_n]$$

$$(\text{om } \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \text{ är en ON-basis}).$$

(där $B_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$),

$$\text{för de att } [T] = P[T]_{B_1} P^{-1}$$

$$\text{eller } [T]_{B_1} = P^{-1}[T]P.$$

Ex: Säg att $[T] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$,

$$B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\} \text{ där } \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [T]_B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Då } P = P_{B_1} \rightarrow S = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

för vi följande ^{matris} faktorisering:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\left([T] = P \cdot [T]_B \cdot P^{-1} \right)$$

Lite att läsa Sjölvn:

Mer generellt, om $B_1 = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$
är bas för $\mathbb{R}^n$ och B_2

bas för $\mathbb{R}^m$ ($m \neq n$ ok!)

Kan vi bilda

$$T_{B_1, B_2} = \begin{bmatrix} [T(\bar{v}_1)]_{B_2} & [T(\bar{v}_2)]_{B_2} & \dots & [T(\bar{v}_n)]_{B_2} \end{bmatrix}$$

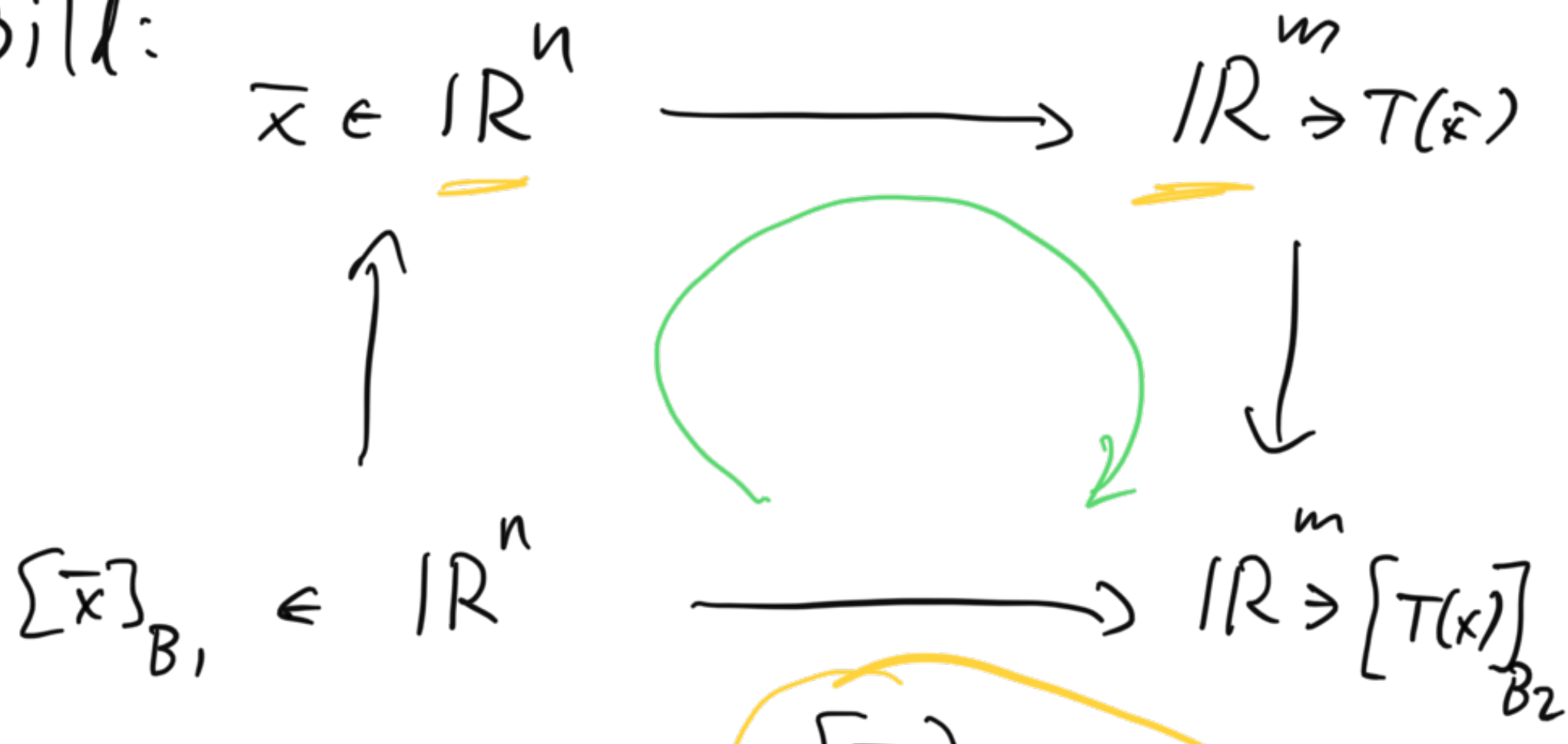
och då blir

$$[T(\bar{x})]_{B_2} = [T]_{B_1, B_2} [\bar{x}]_{B_1}$$

Se sats 8.1.4 samt (27)

och (28) på sid 452.

Bild:



$$[T]_{B_1, B_2}$$

8.2 Diagonaliserbarhet & similitet

Def: Två $n \times n$ matriser

A, C sägs vara similära om det finns en inverterbar matris P så att

$$C = P^{-1} A P$$

(eller: $A = P^{-1} C P$.)

Sats 8.2.1: A, C är similära

$\Leftrightarrow$ det finns baser B_1 & B_2

$$\text{Så att } [A] = [C]$$

$$C^{-1} B_1 \quad C^{-1} B_2$$

Bevis: se bok.

Sats 8.2.3: Antag att A, C
är similära. Då gäller:

a) $\det(A) = \det(C)$

b) $\text{rank}(A) = \text{rank}(C)$

c) $\text{nullity}(A) = \text{nullity}(C)$

d) $\text{tr}(A) = \text{tr}(C)$. ("trace")

e) $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - C)$

(Således har A, C samma
egenvärden, och ~~egenvärden~~
har även samma
algebraiska multiplicitet).

Bevis:

a) $C = P^{-1}AP \Rightarrow$

$\det(C) = \det(P^{-1}AP) =$

$$= \det(P^{-1}) \cdot \det(A) \cdot \det(P) =$$

$$= \cancel{(\det(P))^{-1}} \cdot \det(A) \cdot \cancel{\det(P)} =$$

$$= \det(A).$$

e) $C = P^{-1}AP \Rightarrow$

$$\det(\lambda I - C) = \det(\lambda I - P^{-1}AP) =$$

$$= \det(P^{-1}(\lambda I)P - P^{-1}AP) =$$

$$= \det(P^{-1}(\lambda I - A)P)$$

$$= \cancel{\det(P)^{-1}} \det(\lambda I - A) \cdot \cancel{\det(P)}$$

$$= \det(\lambda I - A). \quad \text{Klart!}$$

$$\left[P^{-1}(\lambda I)P = \lambda P^{-1}IP = \lambda P^{-1}P = \lambda \cdot I \right].$$

Def: Givet skalar λ_0 och
 $n \times n$ matrix A definieras
 λ_0 egenrummet för A .

tillhörande λ_0 , som

$$\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : (\lambda_0 I - A) \bar{x} = \bar{0} \};$$

och dess dimension $m_g(\lambda_0)$

Sågs vara den geometriska
multipliciteten för λ_0 .

(Kor^{ref} algebrisk multiplicitet

$m_a(\lambda_i)$:

$$\det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)^{m_a(\lambda_i)}$$

Sats 8.2.4: Om A, C är

similära så har de

Samma egenvärden, och

dess eigenvärden har Samma

algebraiska och geometriska
multipliciteter.

Sats 8.2.5: Antag att $C = P^{-1} A P$
och att λ är ett eget värde
till A (och därför även till
 C).

Om $\bar{x}$ är en egenvektor till A
(med eget värde λ , dvs $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$)
så är $P^{-1}\bar{x}$ en egenvektor
till C .

Bevis: $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ & $C = P^{-1} A P$

$$\Rightarrow C \cdot (P^{-1}\bar{x}) = (P^{-1} A P) (P^{-1}\bar{x})$$

$$= P^{-1} A (\cancel{P P^{-1}}) \bar{x} = P^{-1} (A\bar{x}) =$$

$$P^{-1} (\lambda \bar{x}) = \lambda \cdot (P^{-1}\bar{x})$$

$$\therefore C \cdot (P^{-1}\bar{x}) = \lambda \cdot (P^{-1}\bar{x})$$

dvs $P^{-1}\bar{x}$ är C -egenvektor!

Def: Vi säger att en $n \times n$ matris A är diagonaliserbar om det finns en inverterbar matris P så att

$$D = P^{-1} A P \quad \text{är} \quad \underline{\text{diagonal}}.$$

Hur avgöra? Hur hitta P ?

Sats: En $n \times n$ matris A är diagonaliserbar $\Leftrightarrow$

A har n stycken

linjärt oberoende egenvektorer

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$.

Anm: vi kan ta $P = [\bar{v}_1 \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n]$.

Beweiside: Skriv om $D = P^{-1} A P$

Som $P D = A P$ och räkna på.

Ö: fyll i resten (eller se bok.)

Sats: (8.2.7; kriterium för oberoende):

Låt $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ vara

~~egen~~ egenvektorer för A ,

och antag att de motsvarande

egenvärdena är olika.

Då är $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$

automatiskt oberoende!

Bevis: Skissas på övning.

Följsats (8.2.8): Om en $n \times n$

matris A har n stycken
olika egenvärden så är

A diagonaliserbar.

Sats 8.2.9: ("bästa/värsta kriteriet")

en $n \times n$ matris A är
diagonaliserbar $\iff$

$$\sum_{i=1}^k m_g(\lambda_i) = n$$

(om A har k olika egenvärden)

$$\iff m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \text{ för}$$

$$i=1, \dots, k.$$

Anm: olikheten $m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$
gäller alltid för $i=1, \dots, k$.

(Sats 8.2.11: läs bok!)

D diagonal:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

eigenvärden!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ = (\lambda - 1)^2 - (-1) \cdot 0 = (\lambda - 1)^2.$$

$$\therefore m_a(1) = 2, \quad \lambda = 1$$

$$\begin{pmatrix} (\lambda - \lambda_1)^2 \\ \lambda_1 = 1 \end{pmatrix}$$

$$m_g = ?$$

$$\text{let } (\lambda_1 I - A) \bar{x} = 0 \quad (\lambda_1 = 1)$$

$$\text{thus } (I - A) \bar{x} = 0$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x_2 = 0, \quad x_1 = t.$$

$$\therefore \{ \bar{x} : (\lambda_1 I - A) \bar{x} = 0 \} = \{ t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

$t \in \mathbb{R}$.

$$m_g(1) = \dim(\dots) = 1.$$

$$m_g(1) < m_a(1).$$

ET diag.!

$$\ddot{O}: A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2$$

$$m_a(1) = 2.$$

$$\text{men: } m_g(1) = \dots ?$$

$$\lambda I - A = 1 \cdot I - A =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(\lambda I - A)\bar{x} = \bar{0}:$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow x_2 = t_2$$
$$x_1 = t_1$$

Lösung.

Rechnet ges an: $\{ \underline{t_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{t_2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$
der

$$\dim \mathcal{L}(1) = \dim = 2.$$