

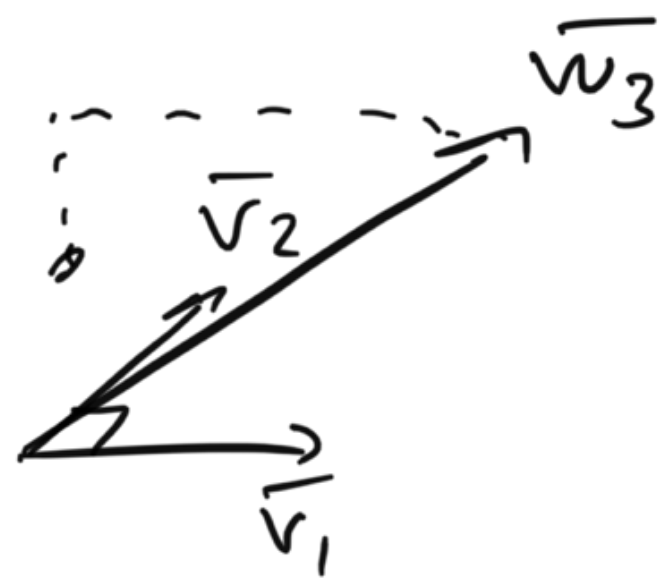
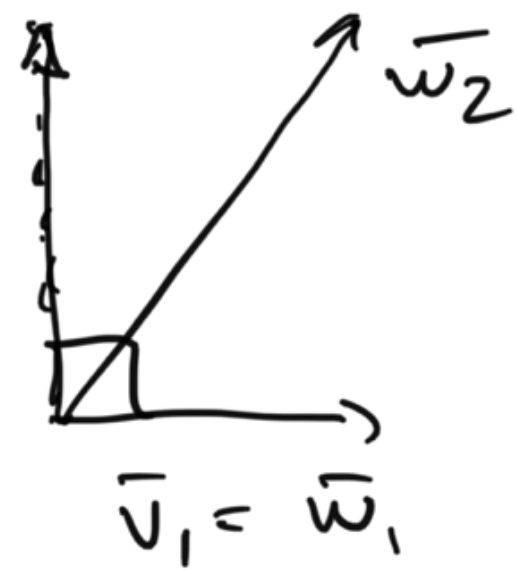
SF 1624, F15 (7.9 forts.
+ 7.11)

Sist: Gram-Schmidt för att
"putsa" ~~en~~ bas till ON-bas.

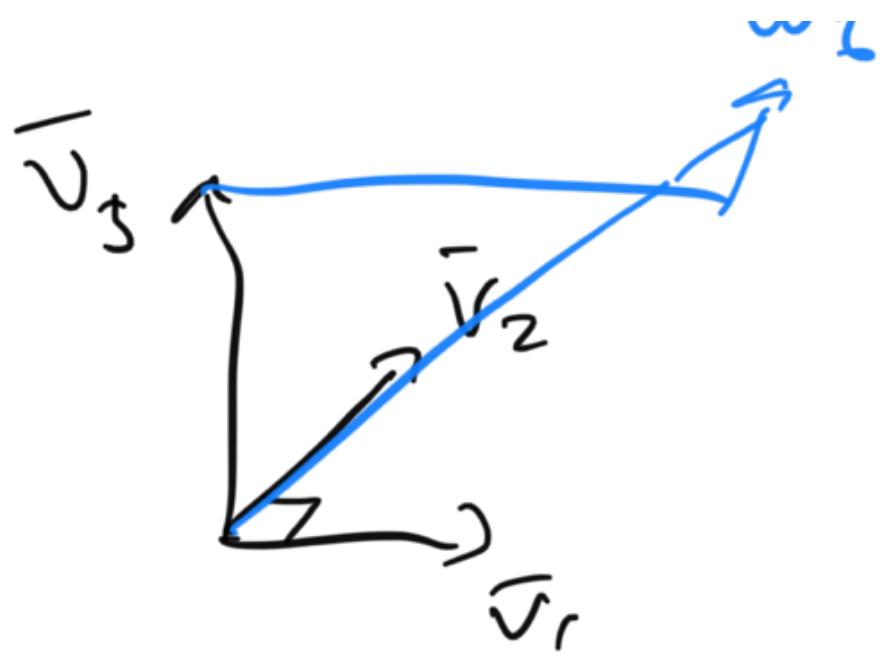
Bild: $W = \text{Span}\{\bar{w}_1, \bar{w}_2\}$. (plan)



$$\bar{v}_2 = \bar{w}_2 - t \cdot \bar{v}_1$$



$\bar{v}_3$



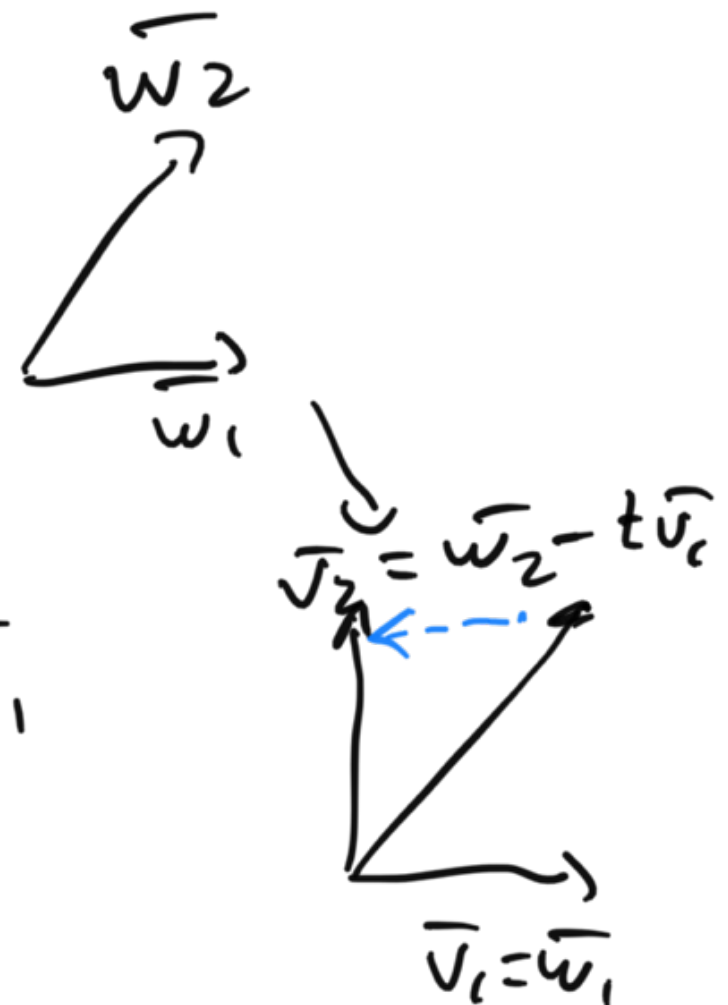
Mod formuler:

Antar alltid att v_i hittar bas
 $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ för W .

L^{ort}

$$\bar{v}_1 = \bar{w}_1$$

$$\bar{v}_2 = \bar{w}_2 - \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{w}_2}{|\bar{v}_1|^2} \bar{v}_1$$



$$\bar{v}_3 = \bar{w}_3 - \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{w}_3}{|\bar{v}_1|^2} \cdot \bar{v}_1 - \frac{\bar{v}_2 \cdot \bar{w}_3}{|\bar{v}_2|^2} \cdot \bar{v}_2$$

...

$$\bar{v}_k = \bar{w}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\bar{v}_i \cdot \bar{w}_k}{|\bar{v}_i|^2} \cdot \bar{v}_i$$

Poäng: metoden ger att

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ är ortogonal

bas.

Steg 2: putsa längder:

$$\hat{v}_i = \frac{1}{|\bar{v}_i|} \cdot \bar{v}_i \quad \left(\begin{array}{l} \text{Skala om} \\ \text{så att} \\ \text{längd} = 1. \end{array} \right).$$

(Anm: ibland används

→ $\hat{v}$ för att beteckna
vektorer med längd 1.)
"normat".

Ex: Hitta ortogonal bas för

planet $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0 \right\}$.

Ö: visa att $\bar{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

är bas.

Kör Gram-Schmidt!

$\bar{v}_1 = \bar{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\bar{v}_2 = \bar{w}_2 - \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{w}_2}{|\bar{v}_1|^2} \cdot \bar{v}_1$

$= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}{\left| \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right|^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{(-1)}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{Klart!}$$

Koll: $\vec{a}$ & $\vec{v}_1$ & $\vec{v}_2$ verkligen
ortogonala? Dvs: $\vec{a} \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$?

$$\text{Well: } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 1/2 + (-1) \cdot 1/2 + 0 \cdot 1 = 1/2 - 1/2 = 0.$$

Flummen! (verkan rätt!).

7.11 (basbyten)

Basbyten, motivering: Låt A

vara en $n \times n$ matrix, och

är tag av egenvektorer till A

bildar bas. (dvs: $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$

är bas och $A\bar{v}_i = \lambda_i \bar{v}_i$ för $i=1, \dots, n$.)

Med "basbyte" kan vi "göra om"

A till den diagonala

matrisen $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$.)

Def: Låt $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$
vara (ordnad) bas för ett ^{$k \rightarrow$} delrum $W \subset \mathbb{R}^n$. Om $\bar{w} \in W$
 ^{$\dim(W) = k$}

kan vi hitta $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$

så att $\bar{w} = \sum_{i=1}^k a_i \bar{v}_i$.

Talet a_i kallas för

koordinaterna för $\bar{w}$ i basen

B. Koordinatvektorn

(m.a.p. B) $(\bar{w})_B$ för $\bar{w}$ i
basen B ges av:

$$(\bar{w})_B = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Kolumnvektorn

$$[\bar{w}]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k \text{ kallas för}$$

Koordinatmatrisen för $\bar{w}$
m.a.p. basen B.

Ex: $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ då $\bar{e}_1, \bar{e}_2 \in \mathbb{R}^3$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Ö: (micro!) lolla att B är bas för W .
 $\bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Notera: $\bar{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = x \cdot \bar{e}_1 + y \cdot \bar{e}_2$

$$\Rightarrow [\bar{w}]_B = \left[\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \right]_B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Ex: Låt $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och

$B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ är bas för

xy -planet $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$

(Ö: vdsen!)

Kan skriva $\bar{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \in W$ som:

$$\textcircled{*} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{x+y}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{x-y}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\text{Koll: } \frac{x+y}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{x-y}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x+y+x-y \\ x+y-(x-y) \\ 0 \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

(Hau gar a i allmündet!?)

Lös du. System! Gauss!

$$\textcircled{*} \Rightarrow \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Vilket koordinatsystem skall vi
gissa?

Vill ha:

$$a_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\leadsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & x \\ & -1 & \vdots & y \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Anm: $S = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$

kallas för standardbasen

för $\mathbb{R}^n$ (notera: $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n \in \mathbb{R}^n$).

Trogligt: $\bar{w} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ser vi

direkt att

$$[\bar{w}]_S = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ eller kort:}$$

$$[\bar{w}]_S = \bar{w}.$$

Anm: Om $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$

är en ON-bas för W

för vi extra enkel farmed:

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^k (\bar{v}_i \circ \bar{w}) \cdot \bar{v}_i$$

(dus $a_i = \bar{v}_i \circ \bar{w}$).

Ö: v/sa!

TeX: $(\bar{w})_B = (\bar{v}_1 \circ \bar{w}, \bar{v}_2 \circ \bar{w}, \dots, \bar{v}_n \circ \bar{w})$.

(Slipper lösen ev. System!).

Basis orthogonal:

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^k \frac{\bar{v}_i \circ \bar{w}}{|\bar{v}_i|^2} \cdot \bar{v}_i$$

Satz: Um B är ON-bas för W
gäller: (für $\bar{w}, \bar{u}, \bar{v} \in W$)

a) $|\bar{w}| = |(\bar{w})_B|$

b) $\bar{u} \circ \bar{v} = (\bar{u})_B \circ (\bar{v})_B$

$$u \cdot v = (u_1, \dots, u_n) \cdot (v_1, \dots, v_n)$$

Basbyten Givet två baser

B & B' (för $\mathbb{R}^n$),

hur är $[\bar{w}]_B$ och $[\bar{w}]_{B'}$ relaterade?

Ans: pöst. (visa!)

$$[\bar{w}]_B \rightarrow \bar{w} \rightarrow [\bar{w}]_{B'}$$

är linjar! Dvs, avbildning
ges av en matrix, som
kallas för basbytesmatrix:

$$P_{B \rightarrow B'}$$

$$[\bar{w}]_{B'} = P_{B \rightarrow B'} \cdot [\bar{w}]_B.$$

Hur hittar vi $P_{B \rightarrow B'}$?

Sats (7.11.3) Basbytesmatrisen ges av:

$$P_{B \rightarrow B'} = \begin{bmatrix} [\bar{v}_1]_{B'} & [\bar{v}_2]_{B'} & \dots & [\bar{v}_n]_{B'} \end{bmatrix}$$

där $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$

givet:
1:s messor
med ekv.
samt ident.

("Tag koordinatvektoren,

m.a.p. u_7 basen, av de gamla basvektorererna!")

Se Ex 5 i boken för "omväg".

Sats 7.11.4: Låt B_1 & B_2

... för $\mathbb{R}^n$.

Vad betyder

De är basbytes matriserna

$$P_{B_1 \rightarrow B_2} \quad \& \quad P_{B_2 \rightarrow B_1}$$

inverterbara, och

inverser ges av:

$$(P_{B_1 \rightarrow B_2})^{-1} = P_{B_2 \rightarrow B_1}.$$

Ex (på "genvägen"): Hitta

$P_{B \rightarrow B'}$ så här: "ny" "gamla".

bildar matris $[B' \mid B]$

$$\sim \dots \sim \left[I \mid ? = P_{B \rightarrow B'} \right]$$

Ex med räkningar!

$$B_1 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}, \quad B_2 = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$$

$$\text{där } \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$(\text{och: } \bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}).$$

"Recept": bildar

$$[B_2 \mid B_1] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{e}_1 & \bar{e}_2 \end{array} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right].$$

$$\therefore P_{B_1 \rightarrow B_2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hitta: $[\bar{v}_i]_B \leftrightarrow$ fun

$$a_1, a_2 \text{ s.t. } a_1 \bar{v}_1' + a_2 \bar{v}_2' = \bar{v}_i$$

$$\text{dvs lös } \begin{bmatrix} \bar{v}_1' & \bar{v}_2' \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

$$[B' | B] \leftrightarrow \begin{bmatrix} \bar{v}_1' & \bar{v}_2' \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$



Seh 7.11.5: Lit B vara

bas för $\mathbb{R}^n$.

D är koordinatavbildningen

$$\bar{x} \mapsto [\bar{x}]_B \quad \underline{\text{linjär}},$$

injektiv samt surjektiv.

(Anm: injektiv + surjektiv
= bijektiv.).

Sats: Om B är en ON-bas

så ges $\bar{x} \mapsto [\bar{x}]_B$ av
en ortogonal matris.

Dessutom: Om B_1 & B_2
är ON-baser så är
basen B för $\mathbb{R}^n$ är D

04) 07te) mawisen

$B_1 \rightarrow B_2$

or beyond.

(.)