

SF1624, F14 (7.7-9)

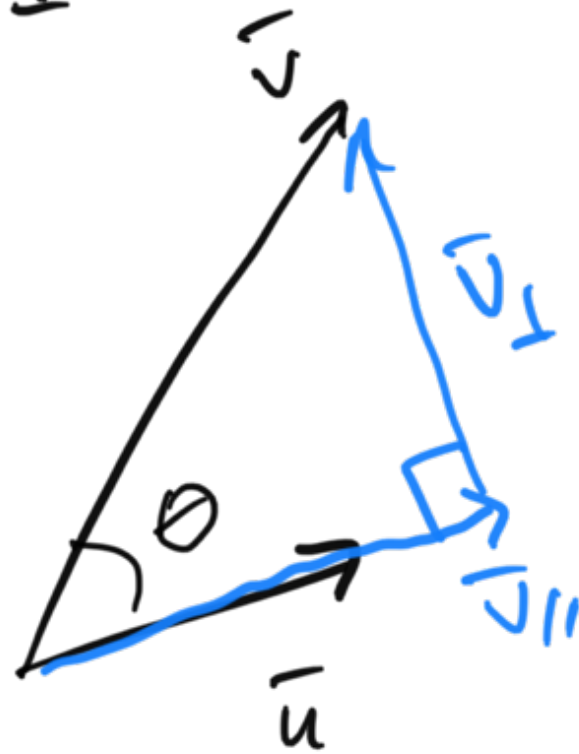
Givet $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$, skriv

$$\bar{v} = \bar{v}_{\parallel} + \bar{v}_{\perp} \quad \text{där}$$

$$\bar{v}_{\parallel} = t \cdot \bar{u} \quad (\text{något } t \in \mathbb{R})$$

$$\text{och } \bar{v}_{\perp} \cdot \bar{u} = 0$$

Bild



linjer!

Säg: $\bar{v}_{\parallel} = \left(\frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}|^2} \right) \cdot \bar{u}$

— vet t .

Ö: kolla att $\bar{v}_{\perp} = \bar{v} - \bar{v}_{\parallel}$ verkligen
är ortogonal mot $\bar{u}$.
(enkel räkning!).

Def: Skriver $\text{proj}_{\bar{u}}(\bar{v}) = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}|^2} \cdot \bar{u}$.

("projektion av $\bar{v}$ på vektorn $\bar{u}$ ").

Anm: Avbildningen $\bar{v} \rightarrow \text{proj}_{\bar{u}}(\bar{v})$
är linjär och motsvarande
matris P ges av

$$P = \frac{1}{\bar{u}^T \bar{u}} \bar{u} \cdot \bar{u}^T$$

$$= \frac{1}{|\bar{u}|^2} \cdot \bar{u} \cdot \bar{u}^T$$

(notera: $\bar{u}^T \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot \bar{v}$).

Ö: visa detta!

Anm: P symmetrisk (dvs $P^T = P$)

och $\text{rank}(P) = 1$.

(om $\bar{u} \neq \vec{0}$). Ö: visa.

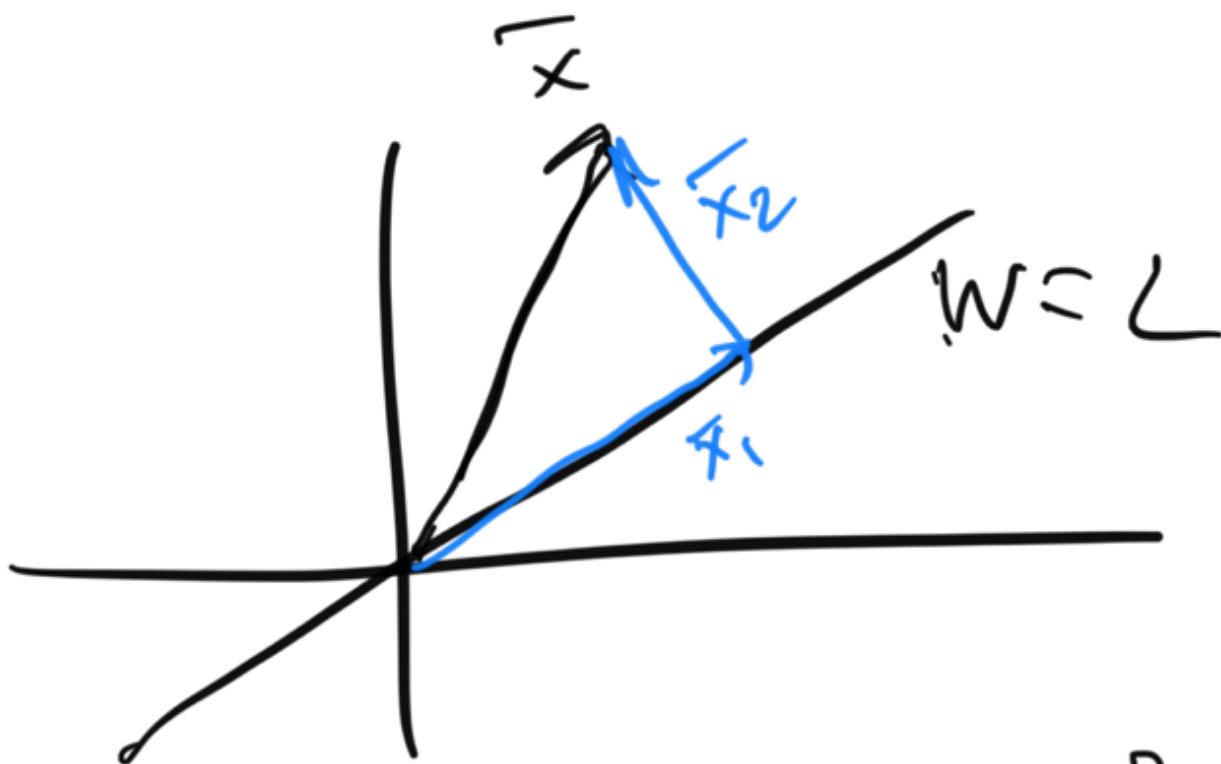
Sats 7.7.4: (projektion på delrum).

Låt $W \subset \mathbb{R}^n$ vara delrum. Då
kan varje $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ skrivas som

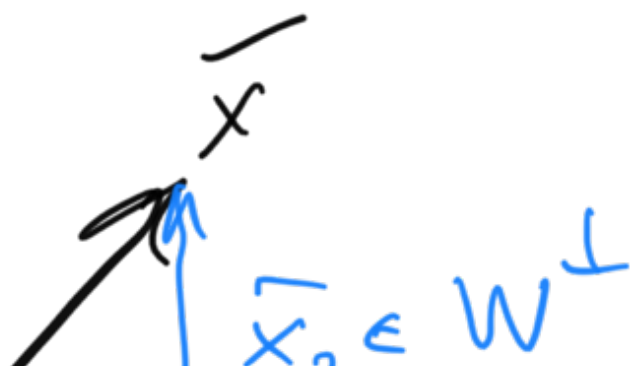
$$\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \quad \text{där} \quad \bar{x}_1 \in W$$

och $\bar{x}_2 \in W^\perp$ precis ett
sätt.

Bild: $W = \text{linje (i } \mathbb{R}^2)$.

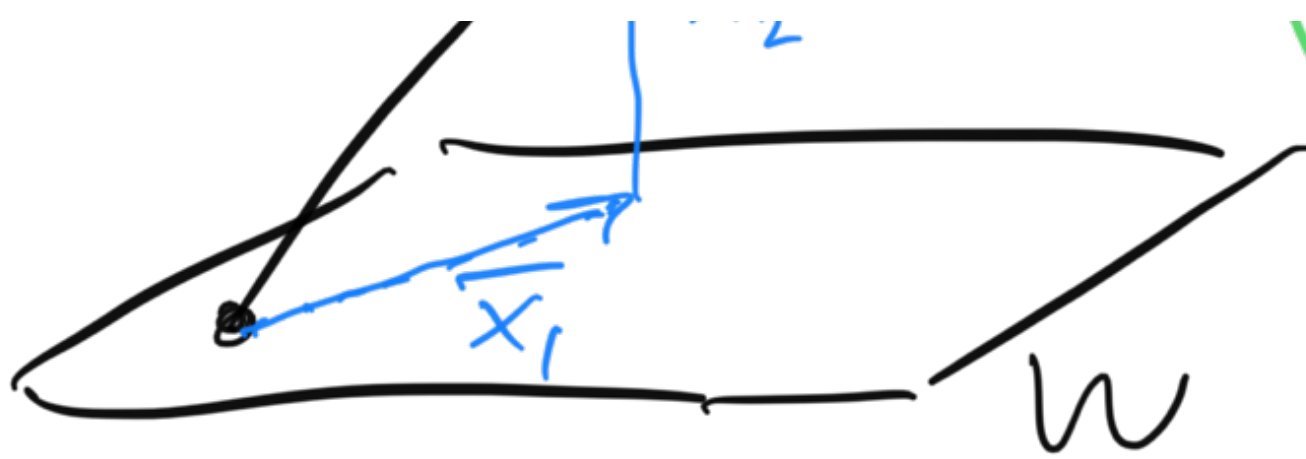


$W = \text{plan (i } \mathbb{R}^3)$:



gudomlig
inspiration!?

:-)



(Nyg!)

Beweiside: Låt $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k\}$

vara bas för W . Bilda

matris $M = [\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_k]$.

Tag $\bar{v} = (M^T M)^{-1} M^T \bar{x}$ och

låt $\bar{x}_1 = M \cdot \bar{v}$, så att

$\bar{x}_2 = \bar{x} - \bar{x}_1$ ($M^T M$ är invertierbar
då $\text{rank}(M) = k$).

Notera att $\bar{x}_1 \in \text{Col}(M) = W$,

så räcker att visa att $\bar{x}_2 \in W^\perp$,

dvs att $M^T \bar{x}_2 = \bar{0}$.

ö: Kolla att

$$M^T \bar{x}_2 = M^T (\bar{x} - M \bar{v}) = \bar{0}.$$

Ann: Avbildning $\bar{x} \rightarrow \bar{x}_1 \in W$

("projection av $\bar{x}$ på W ") betecknas

$\text{proj}_W(\bar{x})$ och motsvarande

matris ges av $P = M(M^T M)^{-1} M^T$.

för: proj på vektor $\bar{u}$:

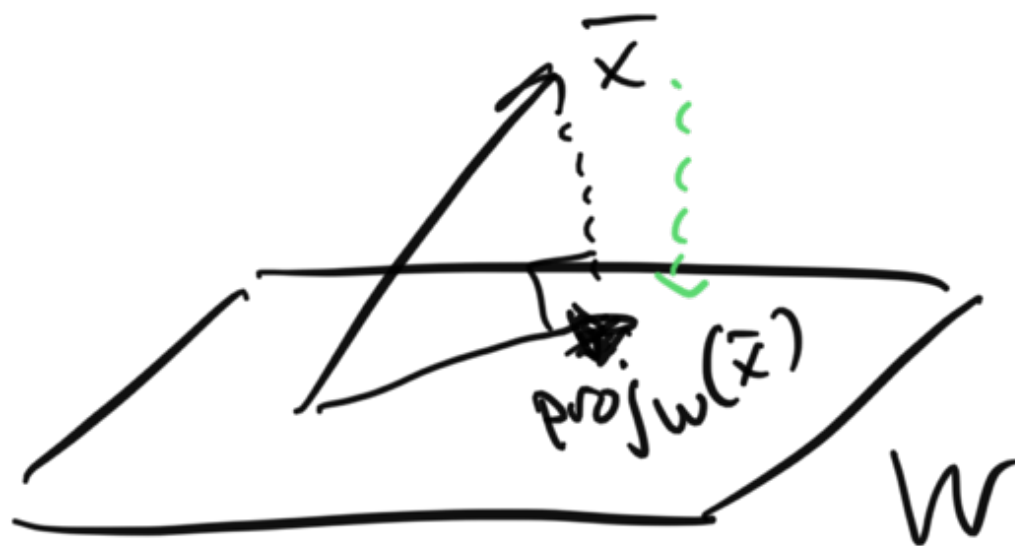
$$\text{proj}_{\bar{u}}(\bar{x}) = \frac{1}{\bar{u}^T \bar{u}} \bar{u} \cdot \bar{u}^T \cdot \bar{x}$$

den matris ges av

$$\frac{1}{\bar{u}^T \bar{u}} \cdot \bar{u} \cdot \bar{u}^T = \bar{u} \cdot \left(\frac{1}{\bar{u}^T \bar{u}} \right) \cdot \bar{u}^T$$

Ö: visa att $P^T = P$.

Bild:



Notera: $\text{proj}_W(\text{proj}_W(\bar{x})) =$

$$= \text{proj}_W(\bar{x})$$

dvs $P^2 = P$ (om $P^2 = P$
 sägs P vara
 idempotent.).

Sats 7.7.6: P svarar mot
 ortogonal projektion p_i^2
 något delrum $W \Leftrightarrow$

$$P^2 = P \quad \underline{\text{och}} \quad P^T = P.$$

(Anm: $W = \text{col}(P)$).

Beweis: Se bok!

$$P = P^2 \quad ! \quad ? \quad \text{Hw} ! ?$$

$$\text{Ex: } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Ö: visa att } P^2 = P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Läs om Strang-diagram i
bok (sid 387-389.).

Amm: Säg att $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$

$\bar{x}_1 \in W$, $\bar{x}_2 \in W^\perp$ där

$\bar{x}_1 = \text{proj}_W(\bar{x})$, så om P

svavar mot $\bar{x} \rightarrow \text{proj}_W(\bar{x})$

ser vi (kolla!) att $\bar{x} \rightarrow \text{proj}_{W^\perp}(\bar{x})$

svavar mot $I - P$.

$$\begin{aligned} \left(\text{Poäng: } \bar{x}_1 &= P \cdot \bar{x}, \bar{x}_2 = \bar{x} - \bar{x}_1 = \right. \\ &= \bar{x} - P \cdot \bar{x} = I \cdot \bar{x} - P \cdot \bar{x} \\ &= (I - P) \cdot \bar{x} \left. \right). \end{aligned}$$

7.8 Minsta kvadratmetoden:

Lös $A\bar{x} = \bar{b}$!

Vad gör vi om $\bar{b} \notin \text{Col}(A)$?

(Börjar gråta?! ;)

Gör så gott vi kan!

Dvs: hitta $\bar{x}$ så att

$|A\bar{x} - \bar{b}|$ minimalt!

Hur? Projektion!

Låt $W = \text{Col}(A)$; minimering

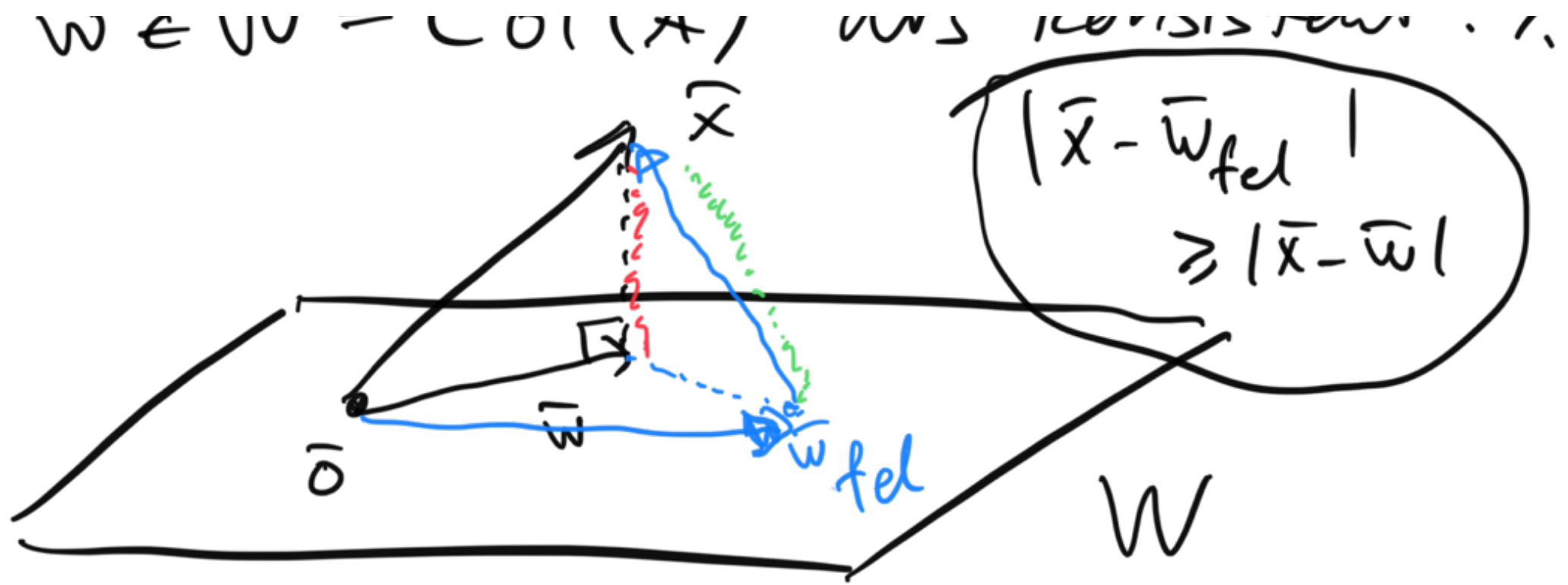
ekvivalent med att hitta

$\bar{w} \in W$ så att $|\bar{w} - \bar{b}|$ är

minimal (tag sedan $\bar{x}$ så att

$A\bar{x} = \bar{w}$; har lösning då

$\bar{w} \in \text{Col}(A)$ (dvs konsistent A^T)



$$\bar{w} = \text{Proj}_W(\bar{x})$$

Step 1: finde $\bar{w} = \text{Proj}_W(\bar{x})$.

Step 2: lös $A\bar{x} = \bar{w}$.

"Genügend" via Normalenvektoren:

Notera: $A\bar{x} - \bar{b}$ minimal

$$\Leftrightarrow A\bar{x} - \bar{b} \in W^\perp \Leftrightarrow$$

$$A\bar{x} - \bar{b} \in \text{Col}(A)^\perp \Leftrightarrow$$

$$A^T (A\bar{x} - \bar{b}) = \bar{0} \Leftrightarrow$$

$$\underline{A^T A \bar{x} = A^T \bar{b}}.$$

"normal-
ekvationen".

Sats 7.8.3:

a) Minsta kvadrat lösningen till

$$A\bar{x} = \bar{b} \text{ ges av lösningen}$$

$$\text{till } A^T A x = A^T \bar{b} \text{ ("normal-ekvationen",}$$

b) Om A har full rank
(kolonnerna i A är oberoende)

är minsta kvadrat lösningen

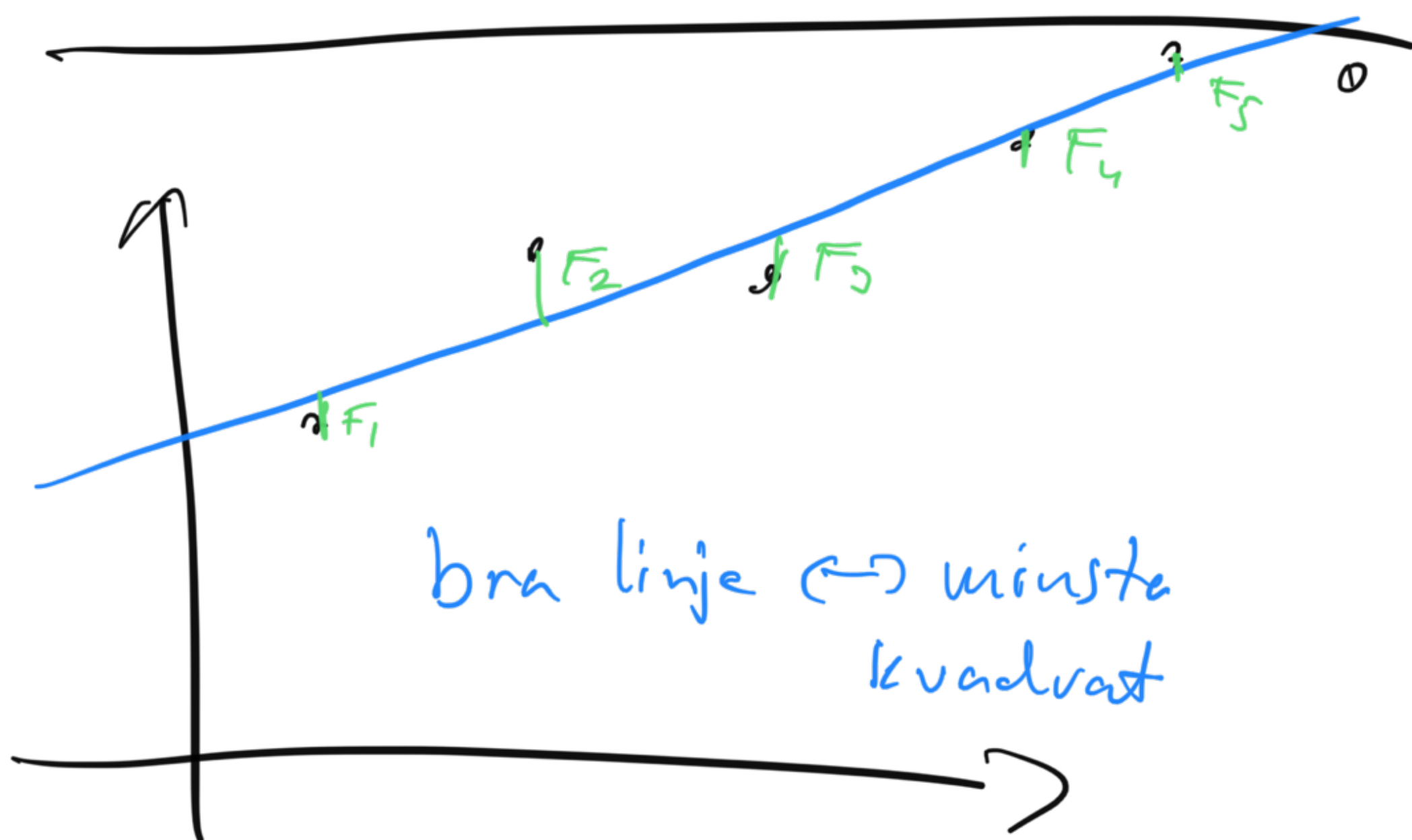
unik, och ges av:

$$\bar{x} = (A^T A)^{-1} \cdot A^T \bar{b}.$$

c) Se bok ifall A 's kolonner
ej oberoende.

(Anm: Finns då oändligt

antal lösningar:).

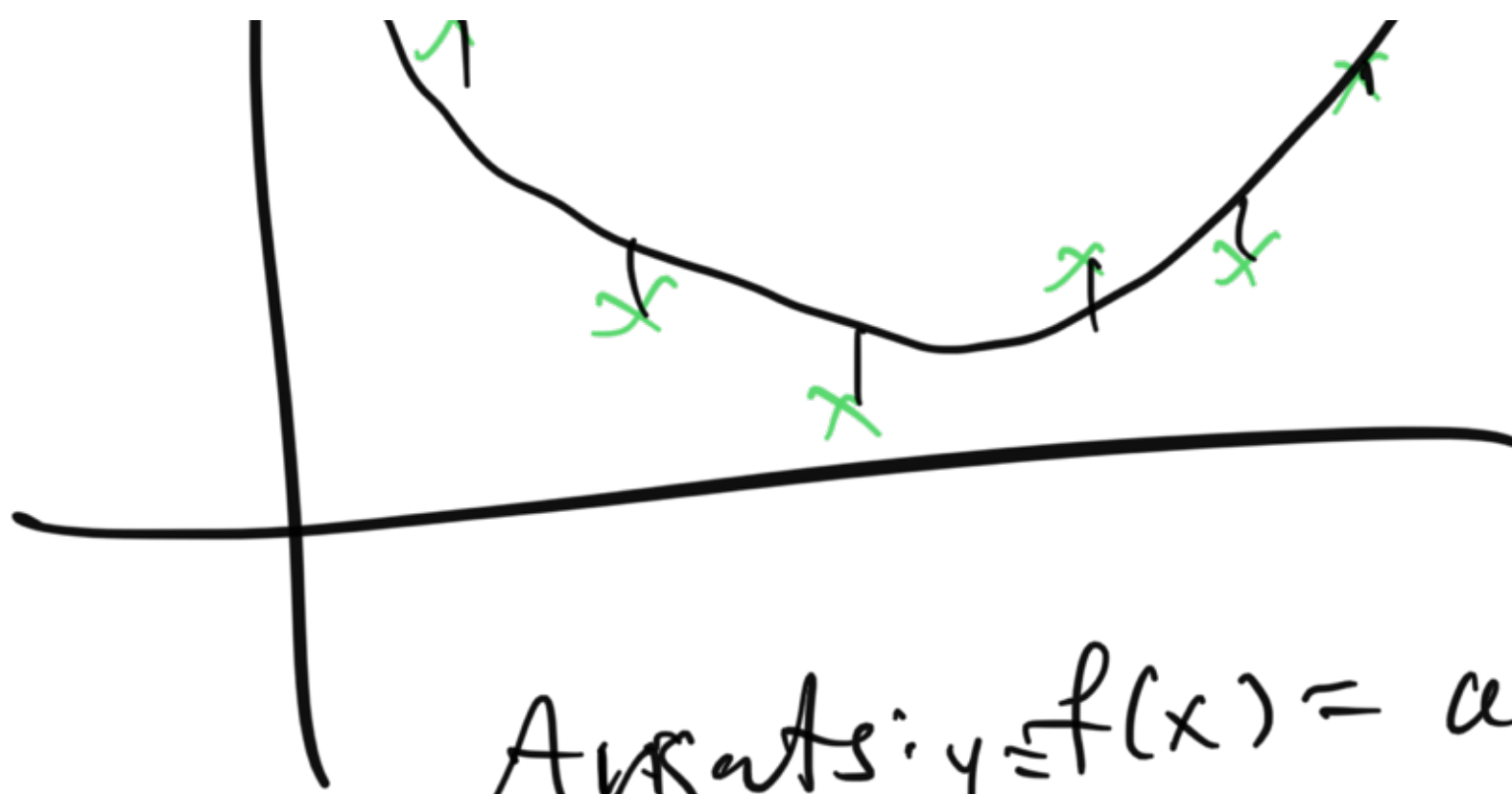


F_i : "fel":

Pröving: minsta kvadrat-metoden
Vittar "bästa" linjen så att

$$\sum F_i^2 \text{ minimeras}$$

"minsta kvadrat".



Ansatz: $y = f(x) = a + bx + cx^2$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$= \dots + \dots$$

$$A\bar{x} - \bar{b} \in W = \text{Col}(A)$$

$$\Leftrightarrow A^T(A\bar{x} - \bar{b}) = \bar{0}.$$

$$\bar{y} \in \text{Col}(A)^\perp$$

$$\Leftrightarrow A^T \bar{y} = \bar{0}.$$

$W \subset \mathbb{R}^n$ detrum.

$$W^\perp = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ s.d. att } \bar{x} \circ \bar{w} = 0 \quad \forall \bar{w} \in W \right\}$$

Bild:

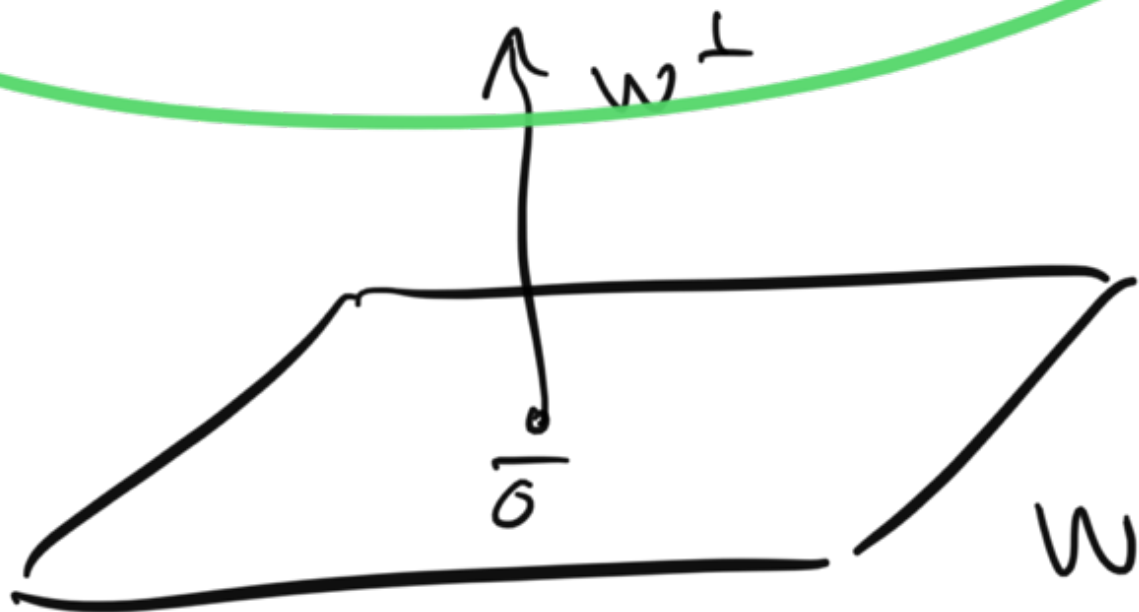


Bild:





7.4 Ortonormalbasen &

Gram-Schmidt

"ON-bas".

Def: Vi säger att en bas

$$\beta = \{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n\}$$

är ortogonal om vektorena

$\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n$ är ortogonala.

Anm: det för ON-bas analogt

vill att $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n$ bildar

ortonormal mängd.

Satz: (7.9.1) (vint!):

Let $S = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \}$ vara
uollskiljda ortogonala vektorer.

De är $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ oberoende

Bevis skiss:

$$\bar{0} = \sum_{i=1}^n t_i \bar{v}_i \Rightarrow$$

$$0 = \bar{v}_1 \cdot \bar{0} = \bar{v}_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^n t_i \bar{v}_i \right) =$$
$$= \sum_{i=1}^n t_i (\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_i) =$$

$$= t_1 \cdot (\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1) = t_1 \cdot |\bar{v}_1|^2$$

$$t_1 = 0 \quad \text{d} \quad |\bar{v}_1|^2 > 0$$

P.S.S. sen vi att $t_2 = t_3 = \dots = t_n = 0$.

∴ vektorens beroende! D.

Poäng: enkla projektions-
formel!

Låt $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_k$ vara
ON-bas för W och bilda
 $M = [\bar{w}_1 \ \bar{w}_2 \ \dots \ \bar{w}_k]$.

① Ö: visa att $M^T M = I$.

② Har sett: matrisen för
 $\bar{x} \rightarrow \text{Proj}_W(\bar{x})$ ges

av:

$$P = M(M^T M)^{-1} M^T \quad \text{som}$$

nu blir (då $M^T M = I$)

$$= M \cdot (I)^{-1} \cdot M^T = \underline{M \cdot I \cdot M^T}$$

$$= M \cdot M^T.$$

↗
enklare!

Sats 7.9.2: Lit $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$

vara ON-bas för W .

a) D_c är

$$\text{proj}_W(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n (\bar{x} \cdot \bar{w}_i) \cdot \bar{w}_i$$

obs: $\in \mathbb{R}$.

b) Om $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ är ortogonal
bas för W :

$$\text{proj}_W(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{(\bar{x} \cdot \bar{w}_i)}{|\bar{w}_i|^2} \cdot \bar{w}_i$$

Ex: Tag $W = \text{Span}\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\} \subset \mathbb{R}^3$

(proj. p' plane)

Notera: $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ är ON-bas
för W .

$$\therefore \text{proj}_W(\bar{x}) = (\bar{x} \cdot \bar{e}_1) \cdot \bar{e}_1 + (\bar{x} \cdot \bar{e}_2) \cdot \bar{e}_2$$

$$= \left(\text{om } \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) =$$

$$\text{proj} = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \bar{e}_1 + \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \bar{e}_2$$

$$= x \cdot \bar{e}_1 + y \cdot \bar{e}_2$$

$$= \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\therefore$ Proj p' xy-plane ($\in \mathbb{R}^3$)

$$\text{ges av: } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(Uppenbart!?).

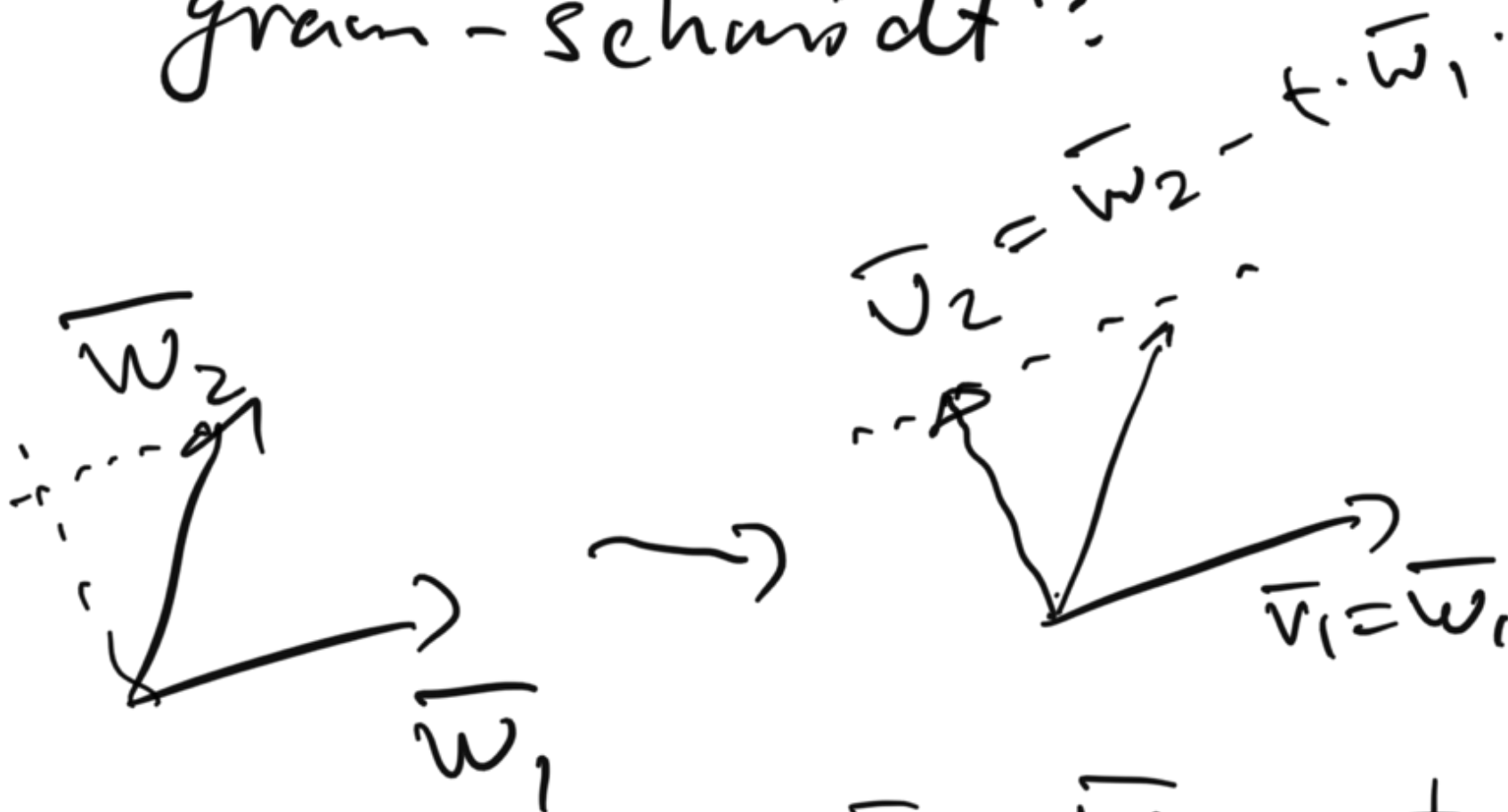
Sats 7.9.5: Givet delrum
 $W \subset \mathbb{R}^n$ så kan vi hitta
en ON-bas för W .

Steg 1: hitta ortogonal $\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n$ bas för W .

Steg 2: "putsar till längden".

bilda $\hat{v}_i = \frac{1}{|\overline{v}_i|} \cdot \overline{v}_i$ (lätt!)

Svårare del: steg 1: gör mha
"gram-schmidt".



$\overline{v}_2 = \overline{w}_2 - t \cdot \overline{w}_1$
for "listigt" t .