

SF 1624 F13 (7.3-6.).

7.3 Let $A = [\bar{c}_1 \ \bar{c}_2 \ \dots \ \bar{c}_n]$

$= \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \vdots \\ \bar{r}_m \end{bmatrix}$ where $m \times n$ matrix.

3 important results:

(1) $\text{row}(A) = \text{Span}\{\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_m\}$

(2) $\text{col}(A) = \text{Span}\{\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n\}$

(3) $\text{ker}(A) = \text{null}(A) = \{\bar{x} : A\bar{x} = \bar{0}\}$
("nullspace")

Def: $\text{rank}(A) = \dim(\text{row}(A))$

$\text{rank}(A) = \dim(\text{col}(A))$
via SVD.

$\text{nullity}(A) = \dim(\text{null}(A))$.

Def: Om $S \subset \mathbb{R}^n$ definieras vi

$S^\perp$, ortogonala komplementet till S , som

$$S^\perp = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} \cdot \vec{s} = 0 \quad \forall \vec{s} \in S \}$$

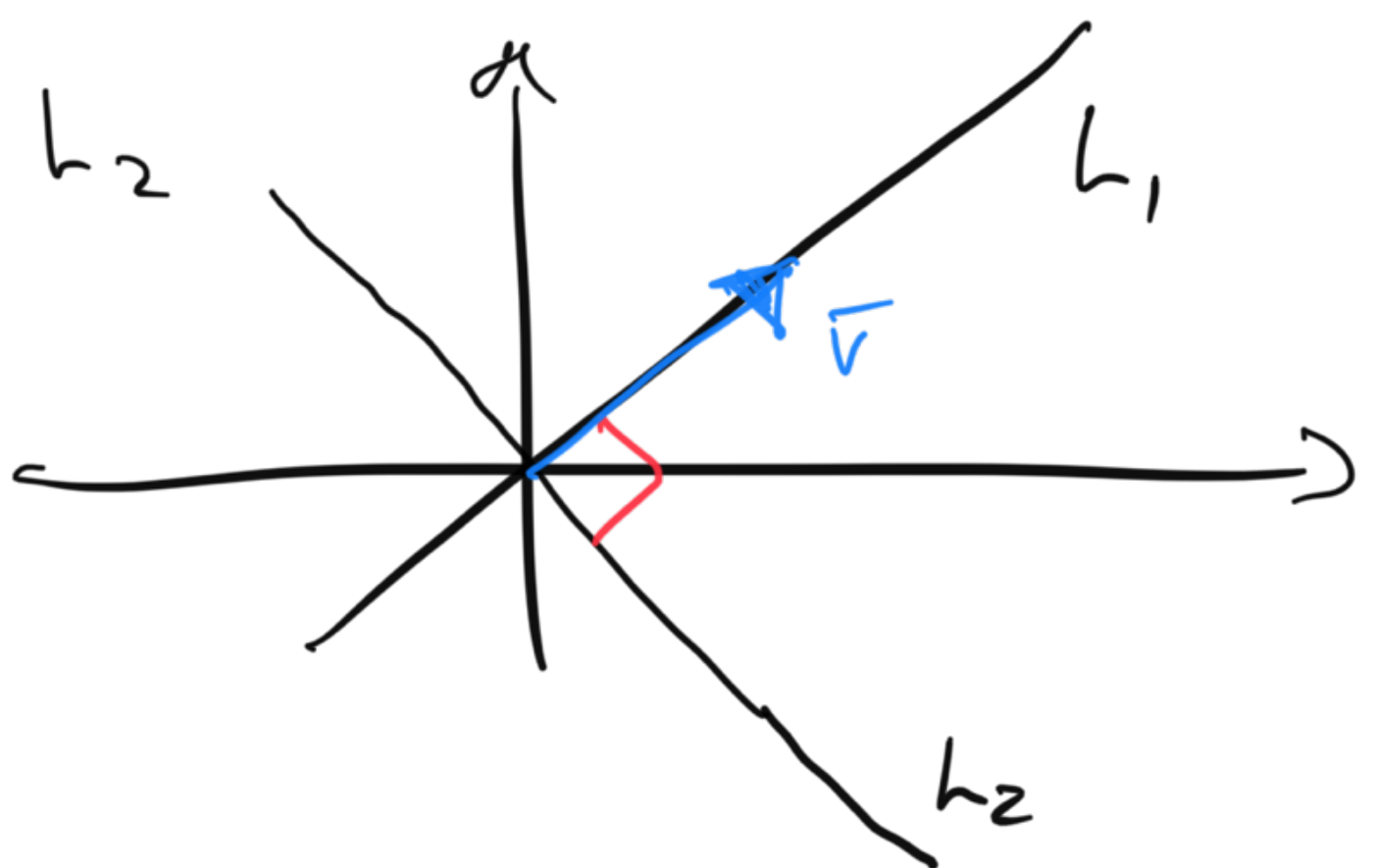
↑ skalär prod.

Sats: $S^\perp$ är ett delrum till $\mathbb{R}^n$.

Beweis: ö.

Ex: $S = L_1$ (i $\mathbb{R}^2$) $\mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow S^\perp = L_2$$



Anm: Om $L_1 = \{ t \cdot \vec{v} : t \in \mathbb{R} \}$

$$S^\circ \text{ är } \{ \vec{v} \} = L_1^\perp = L_2$$

Ö: Om $S \subset \mathbb{R}^3$ är linje är

$$S^\perp = \dots ?$$

Ö: Om $S \subset \mathbb{R}^3$ är ett plan så är

$$S^\perp = \dots ?$$

Sats 7.3.4:

$$a) \quad W \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow W^\perp \cap W = \{ \vec{0} \}.$$

$$b) \quad S \neq \emptyset \Rightarrow S^\perp = (\text{Span}(S))^\perp$$

tomma mängden

$$c) \quad W \subset \mathbb{R}^n \text{ delrum}$$

$$\Rightarrow (W^\perp)^\perp = W$$

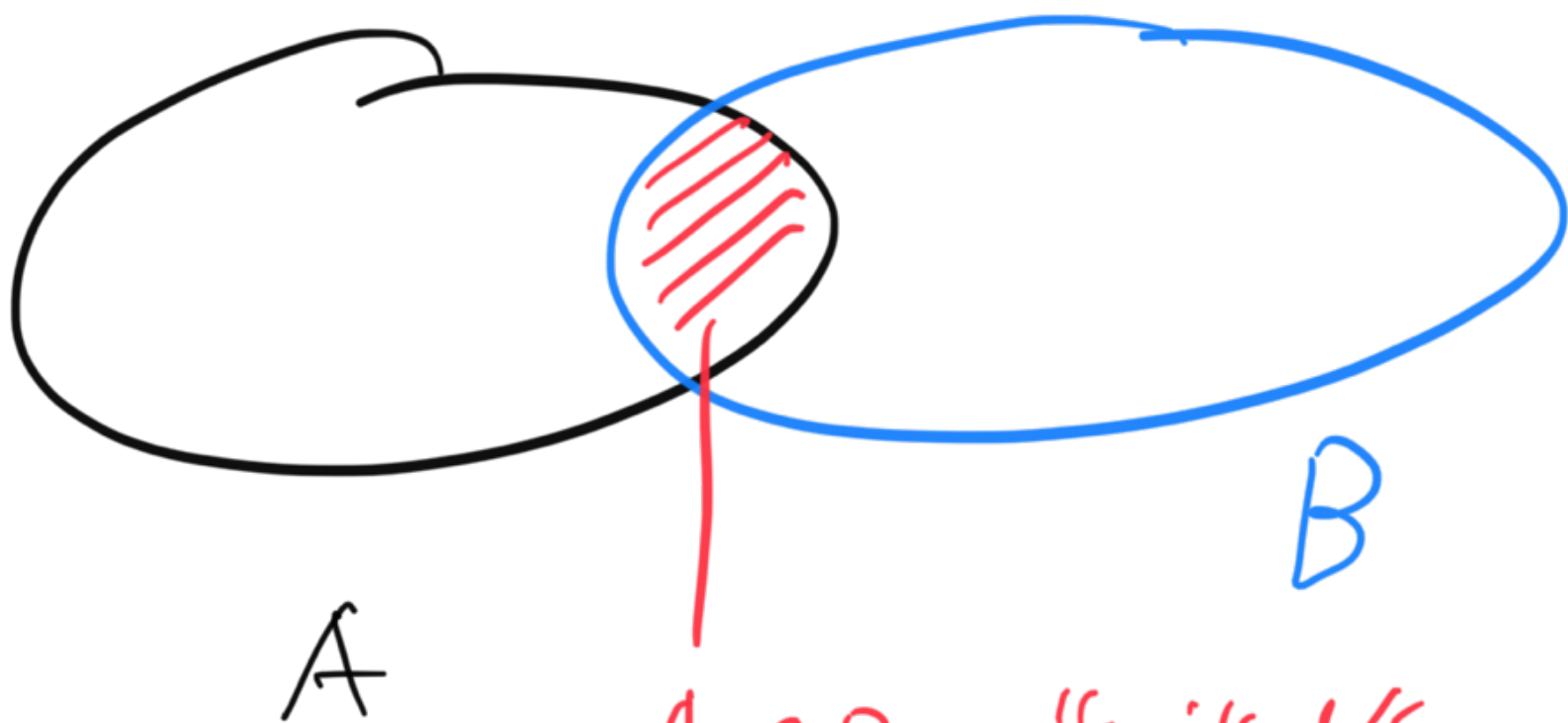
Beweis: se bok. (Komitör bilder.).

Sats 7.3.5-6: $\text{row}(A)^\perp = \ker(A)$.

och $\text{col}(A)^\perp = \ker(A^T)$.

(Bevis: öv.).

~~Snitt~~ Snitt:



$A \cap B$: "snittet".
(= "skärning").

$\bar{x} \perp \bar{y} \iff \bar{x} \cdot \bar{y} = 0$
: ortogonalitet
("vinkel rät").

$S^\perp = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \cdot \bar{s} = 0 \ \forall \bar{s} \in S \}$.

Ide: $\text{row}(A)^\perp = \text{ker}(A)$

$$\text{Ker}(A) = \{ \bar{x} : A\bar{x} = \bar{0} \}$$

$$A = \begin{bmatrix} \vdots \\ r_1 \vdots r_m \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \bar{x} = \begin{bmatrix} r_1 \cdot \bar{x} \\ \vdots \\ r_m \cdot \bar{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$r_i \cdot \bar{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{x} \perp r_i.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

$$r_1 \cdot \bar{x} = [1 \ 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [x_1 + 2x_2]$$

" $= x_1 + 2x_2$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

↑ vektorer skal. prod.!

Satz 7.3.7: Antag att $A \sim B$

De är :

↑
rad. elev.

a/ $\text{row}(A) = \text{row}(B)$

b/ $\text{ker}(A) = \text{ker}(B)$.

c/ Om B är på trappform ges
en bas för $\text{row}(A)$ av de
nollskiljda raderna i B .



Problem: Givet $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_s$,
hur hitta bas för $\text{Span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_s\}$?

So: låt A vara matrisen som
ges genom att låta $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s$

vara raden. Reducera till

trappform $A \sim \dots \sim B$,

behåll sedan alla nollskiljda

rader i B . (Ev. gör sedan om rader till kolonner.).

Kort: Gauss!

7.4 Dimensionssatsen + följder:

Sats 7.4.1 (viktig): Låt A vara

en $m \times n$ matris. Då är

$$\text{rank}(A) + \text{nulity}(A) = n.$$

Beweis: räkna ledande ettor.
[se bok.]

Problem: Givet oberoende vektorer

$$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n, \text{ hur}$$

"fylla på" så att

$$\{\underbrace{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n}_{\text{"gamla"}}, \underbrace{\bar{v}_{n+1}, \bar{v}_{n+2}, \dots, \bar{v}_n}_{\text{nya}}\}$$

Gillar bas för $\mathbb{R}^n$? ("Bygg bas")

Så: bygg $k \times n$ matrix A

med $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ som rader.
 $A = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{bmatrix}$

Låt sedan $\bar{v}_{n+1}, \bar{v}_{n+2}, \dots, \bar{v}_n$

vara bas för $\ker(A)$.

(Hur hitta? Lös elv. system!).

$\Rightarrow \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n, \bar{v}_{n+1}, \dots, \bar{v}_n$
 är bas för $\mathbb{R}^n$.

Ex: $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Hur Fylla p^0 !

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\text{Lös } A\bar{x} = \bar{0} : \leftarrow (\text{bas för ker}(A))$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

$$\therefore \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{gamla}}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{nya}}$$

är bas för $\mathbb{R}^3$.

Sats 7.4.3 : Låt $W \subset \mathbb{R}^n$

varen delrum . Då är

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = n.$$

Beweis: se oben.

Läs själva: Sats 7.4.4-6.

[Monstret växer!

Nytt: (q) : $\text{rank}(A) = n$

(r) : $\text{nullity}(A) = 0.$]

7.5 Rank-satsen, samt tillämpningen

Sats 7.5.1 : (viktig!)

$$\dim(\text{row}(A)) = \dim(\text{col}(A)).$$

!!

öö : visa!

ö: läs bok.

Följd: $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T).$

Sats 7.5.3 : (konsistenssatsen):

Låt $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$ vara
 $m \times n$ matris, och $\bar{b} \in \mathbb{R}^m$.

Följande är de ekvivalenta:

a) $A\bar{x} = \bar{b}$ är konsistent

b) $\bar{b} \in \text{Col}(A)$

c) $\text{rank}(A) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} A & \bar{b} \end{bmatrix}\right)$
 $\quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad \underline{[\bar{a}_1 \ \bar{a}_2 \ \dots \ \bar{a}_n \ \bar{b}]}$

Beweiside: $\bar{b} \in \text{Col}(A) \Leftrightarrow$

$$\bar{b} \in \text{Span}\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$$

$$\Leftrightarrow \text{rank} \text{ går ty upp.}$$

Läs själva: sid 363-364.

("full rad/kolumn rank.")

Lite om A kontra $A^T A$:

Sats 7.5.8 (viktig): Låt A vara en $m \times n$ matris. Då gäller:

a) $\text{null}(A) = \text{null}(A^T A)$

b) $\text{row}(A) = \text{row}(A^T A)$.

c) $\text{col}(A^T) = \text{col}(A^T A)$

d) $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T A)$.

Bevis av a):

Del 1: visa att $\text{null}(A) \subset \text{null}(A^T A)$:

$$\bar{x} \in \text{null}(A) = \ker(A) \Rightarrow$$

$$A\bar{x} = \bar{0} \Rightarrow A^T A\bar{x} = A^T \bar{0} = \bar{0}$$

$$\Rightarrow (A^T A) \cdot \bar{x} = \bar{0}, \text{ dvs}$$

$$\bar{x} \in \ker(A^T A)$$

$$x \in \text{null}(A^T A) \text{ i.e. } 1 \times \text{int.}$$

(empty
vector).

$$\text{Def 2: } \text{null}(A^T A) \subset \text{null}(A):$$

$$\bar{x} \in \text{null}(A^T A), \text{ then } A^T A \bar{x} = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \bar{x}^T A^T A \bar{x} = \bar{x}^T \bar{0} = 0$$

$$\Rightarrow (\bar{x}^T A^T)(A \bar{x}) = 0$$

$$\Rightarrow (A \bar{x})^T (A \bar{x}) = 0$$

$$\Rightarrow (A \bar{x}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{scalar product}}}{\cdot} (A \bar{x}) = 0$$

$$\left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{matrix} \\ \text{prod.}}}{\bar{x}^T \cdot \bar{y}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{scalar} \\ \text{prod.}}}{\bar{x} \cdot \bar{y}} \right]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 + 8 = 11$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 + 8 = 11.$$

$$|A \bar{x}|^2 = 0$$

$$\Rightarrow A\bar{x} = \bar{0}$$

$\therefore \text{null}(A^T A) \subset \text{null}(A)$.
Klart, del 2.

Klart nu bevis för del a!

∴

Följsats (7.5.10): Låt A vara
 $m \times n$ matris. Då är

följande ekvivalenta:

a, $A\bar{x} = \bar{0}$ har bara triv. lösning.

b, - c, Se boh.

d, $A^T A$ är inverterbar.

7.6 Pivotsets + tillämpningar

Detta är direkt relaterat

Problem: given vectors

$S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$, har litta delmängd $S_1 \subset S$ s.d. att

S_1 är bas för $\text{Span}(S)$?

("Kasta vektorer!").

Def: Låt A vara $m \times n$ matris, och anta att

$A \sim R$ med R i

trappform. Pivottkolonnerna

i A är kolonnerna i A

som svarar mot ledande
ettor i R .

Ex: $A = [\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3 \vec{a}_4 \vec{a}_5]$ pivot-
kolonner.

$$\sim \dots \sim R = \begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ledande ettor

Satz 7.6.3 (pivotsatsen):

Pivotkolonnerna i A

bildar bas för $\mathbb{R}^n$

$\text{col}(A)$.

Ex: Låt $\bar{v}_1 = (1, -2, 0, 3)$

$\bar{v}_2 = (2, -5, -3, 6), \bar{v}_3 = (0, 1, 3, 0)$

$\bar{v}_4 = (2, -1, 4, -7).$

Låt $W = \text{Span} \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4 \}.$

1. 1. 1. 1. 1.

finn bas för W !

1. Bilda $A = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3 \ \bar{v}_4]$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

2. Många radoperationer:

$$A \sim \dots \sim R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

led. ettar.

~~$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$~~

$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_4$ bilden

bas för W .