

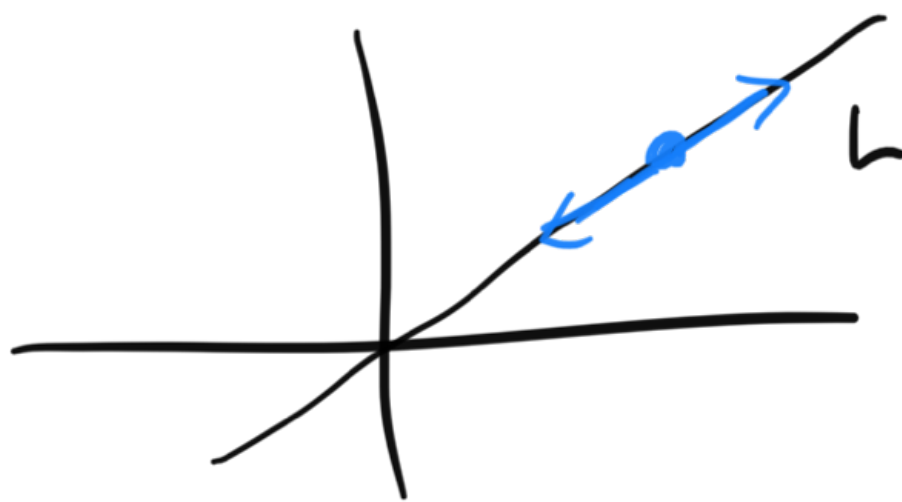
SF1624, F12 (7.1-7.2)

7.1 Baser och dimension.

Intuition för dimension: "antalet frihetsgrader".

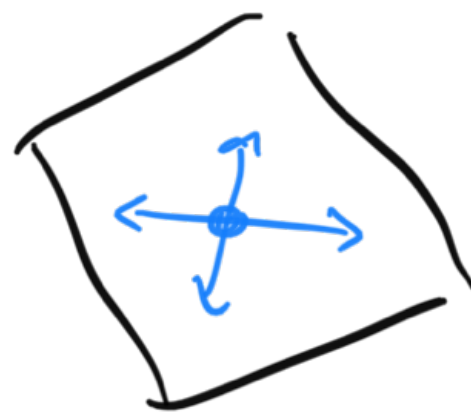
Ex: linje L (i $\mathbb{R}^2$)

$$\dim(L) = 1$$



plan $\pi \subset \mathbb{R}^3$

$$\dim(\pi) = 2.$$



Formalisera mha bas.

Def: Låt $V \subset \mathbb{R}^n$ vara ett

delrum. En mängd vektorer

$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ sägs vara en

bas för V om:

(1) $\text{Span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\} = V$

("spänner upp").

(2) $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ är linjärt

oberoende ("oberoende").

Ex. Låt $V = \mathbb{R}^n$. Då är

$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n \in \mathbb{R}^n$ en bas för $\mathbb{R}^n$

(Kallas ofta $\bar{e}_n$ "standard basen")

Vad är? Hur se? Jo: givet

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Kan vi survive

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{e}_i = x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \bar{e}_1$ $\uparrow \bar{e}_n$

$\therefore \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ Spänner upp $\mathbb{R}^n$.

Oberoende? Om

$$\bar{0} = \sum_{i=1}^n y_i \bar{e}_i = y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + y_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \Rightarrow y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$$

detta ~~över~~ $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$

är oberoende.

$\therefore$ Spänner upp + oberoende
 $\Rightarrow$ har en bas!

Sats: Låt $n \geq 2$ och låt

$$S = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \} \text{ vara}$$

nollskiljda vektorer i $\mathbb{R}^n$.

Då är S linjärt beroende

$\Leftrightarrow$

en av vektorerna kan

Skrivas som linjär kombination
av de föregående vektorerna.

Bevis: $\Leftarrow$ följer av Sats 3.4.6.

$\Rightarrow$: Antag att S är beroende,

Då finns $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$,

ej alla noll, så att

$$\sum_{i=1}^n t_i \vec{v}_i = \vec{0}.$$

Låt j vara det sista indexet

så att $t_j \neq 0$ (dvs $t_i = 0$ om
 $i > j$).

Vi får då:

$$\sum_{i=1}^j t_i \bar{v}_i = \bar{0} \quad , \text{ med } t_j \neq 0$$

$$\Rightarrow t_j \bar{v}_j = - \sum_{i=1}^{j-1} t_i \bar{v}_i$$

$$\Rightarrow \bar{v}_j = \sum_{i=1}^{j-1} \left(-\frac{t_i}{t_j} \right) \bar{v}_i ,$$

dvs $\bar{v}_j$ är en linj. komb.

av de föregående vektorerna.

Sats 7.1.3 (Existens av bas).

Låt V vara ett nollskilt
delrum till $\mathbb{R}^n$. Då finns
det en bas till V , som
består av som mest n vektorer.

Beweis: Tag nollskilda $\bar{v}_1 \in V$.

Om $V = \text{Span} \{ \bar{v}_1 \}$ är vi

*

~~Klar~~ Klara!

Om $V \neq \text{Span}\{\bar{v}_1\}$, välj $\bar{v}_2 \in V$
som inte är linjär kombination
av $\bar{v}_1$. (Förva satsen $\Rightarrow$
 $\bar{v}_1$ & $\bar{v}_2$ oberoende).

Om $V = \text{Span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$: klart!

Om inte: fortsätt på samma
sätt! Efter k steg har
vi hittat k st oberoende
vektorer $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k \in V$.

Notera att processen måste
ta slut för $k \leq n$, eftersom
 $n+1$ vektorer i $\mathbb{R}^n$ är
automatiskt beroende
(se sats 3.4.8.).

Alltså måste det finnas k s.a.

Att det finns en bas i $\mathbb{R}^n$

Så att $\text{Span}\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} = V$

och $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ oberoende.

Dvs $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ är en bas.
□

$$\text{Span}\{\bar{v}_1\} = \{t_1 \cdot \bar{v}_1 : t_1 \in \mathbb{R}\}.$$



$$\text{Span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\} = \{t_1 \bar{v}_1 + t_2 \bar{v}_2 : t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Anm: I allmänhet finns det

massor av olika val

för att ~~ge~~ "göra en bas".

För $\checkmark$ $\bar{e}_1, \bar{e}_2 \in \mathbb{R}^2$.

L1: $\{e_1, e_2\}$ är en bas

för $\mathbb{R}^2$, men även

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ är en bas

för $\mathbb{R}^2$.

Ö: Låt $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathbb{R}^2$. Bilda

$A = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2]$; då är $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$

bas för $\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Sats 7.1.4 Antag att $B_1 = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$

och $B_2 = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ är

baser för ett delrum $V \subset \mathbb{R}^n$.

Då är $m = n$. ("antal basvektorer
är konstant").

Bevis: Antag att $k < m$.

(Fallet $k > m$ svarlöst).

B , bas $\Rightarrow B$ spänner upp V

$\Rightarrow$ kan hitta a_{ij} så att

$$\bar{w}_j = \sum_{i=1}^k a_{ij} \bar{v}_i \quad \text{för } j=1, \dots, m.$$

$$\therefore [\bar{w}_1 \ \bar{w}_2 \ \dots \ \bar{w}_m] = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_k] \cdot A$$

där A är $k \times m$ och $A = [a_{ij}]$.

Men: $k < m \Rightarrow A\bar{x} = \bar{0}$

har en icke trivial lösning,

$$\text{dvs } \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \neq \bar{0}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m x_i \bar{w}_i = [\bar{w}_1 \ \dots \ \bar{w}_m] \cdot \bar{x}$$

$$= ([\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_k] \cdot A) \cdot \bar{x}$$

$$= ([\bar{v}_1 \ \dots \ \bar{v}_k]) (A \cdot \bar{x}) = \bar{0}.$$

$$\sum_{i=1}^m \bar{w}_i = \bar{0}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^m x_i \bar{w}_i = \bar{0}, \text{ dvs}$$

(HAHAHA!!!) $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_m$

måste vara beroende!

Motstridelse, dvs $k < m$

~~Är~~ Omöjligt! Klart! $\square$.

[Korollär: $A\bar{x} = \bar{0}$, $\bar{x} \neq \bar{0}$,
dvs $\sum_{i=1}^m x_i \bar{w}_i = \bar{0}$ är en

icke trivial linjär komb.

som bildar nollvektor $\Rightarrow$
vektorerna beroende]

Def: Låt $V \subset \mathbb{R}^n$ vara ~~ett~~ ett nollskilt
delrum, och $v \in V$ någon har

$$B = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \} \text{ för } V.$$

$$\text{Då är } \dim(V) = k.$$

Anm: Konvention: $\dim(\{\bar{0}\}) = 0$.

Ex: Låt $V = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : A\bar{x} = \bar{0} \}$
 (där A är $m \times n$ matrix).

"Recept" för att hitta $\dim(V)$:

Maka Gaussande $\Rightarrow$ ^{den} allmänna

lösningen till $A\bar{x} = \bar{0}$ är på

formen $\bar{x} = \sum_{i=1}^s t_i \bar{v}_i$

(där $t_1, \dots, t_s$ är fria variabler)

Dvs: $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s$ spänner upp V
 och (skall visa senare)

$\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_s$ är oberoende.

Dvs $\{v_1, \dots, v_s\}$ ger en bas.
(för V).

$$\therefore \dim(V) = s.$$

Anm: $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_s$ kallas för
kanonisk bas för lösningss-
rummet till $A\bar{x} = \bar{0}$.

7.2 Egenskaper hos baser.

Sats 7.2.1: Om $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$

är en bas för ett delrum $V \subset \mathbb{R}^n$

så kan varje $\bar{v} \in V$ skrivas

som

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^k t_i \bar{v}_i \quad \text{pö precis}$$

ett sätt.

Beris: se bok.

Sats 7.2.2 : två sätt att bygga bas.

a) "ovanifrån": hitta $S = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$

så att $\text{Span } S = V$,

och "kasta" vektorer om

S är beroende.

b) "underifrån": Om S oberoende

men $\text{Span } S \neq V$, lägs till
väl vald vektor.

Bewis: se bok.

Sats 7.2.4: Låt V, W vara
delrum till $\mathbb{R}^n$, och

anta att $W \subset V$. Då gäller:

a) $0 \leq \dim(W) \leq \dim(V) \leq n$.

b) $V = W \iff \dim(V) = \dim(W)$.

Bewis: se bok.

.. .. 7.2.3 & 7.2.5 i boken.

0: lös skriv

Sats: 7.26: Låt $V \subset \mathbb{R}^n$ vara
ett delrum, med $\dim(V) = k$.

De gäller

a) $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$ oberoende ⊗

$\Rightarrow \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ är bas.

b) $\text{Span}\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\} = V$

$\Rightarrow \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ oberoende
och därtill bas.

c) Färre än k vektorer kan

ej spänna upp V .

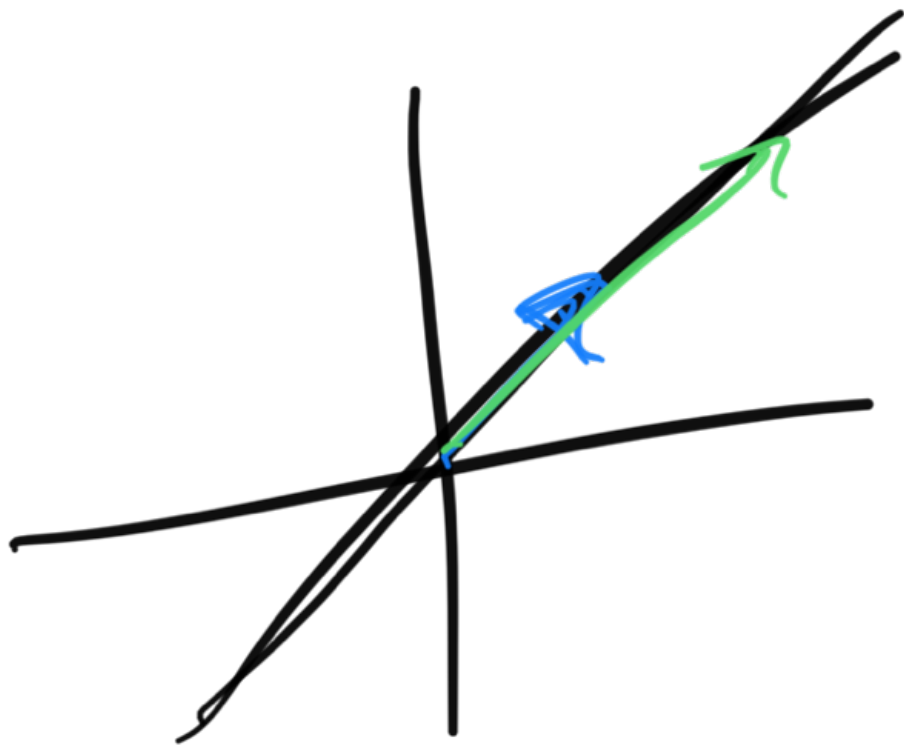
d) Fler än k vektorer i V
måste vara beroende.

Ans: Monstre 7 vakte igen.

(Satz 7.2.7)

o) Kolonvektorene i A bilden
bas for $\mathbb{R}^n$.

p rad-vektorene — r —.



$\bar{v}_1$ bas

$5\bar{v}_1$ bas

$99\bar{v}_1$ bas

:

(men: $0 \cdot \bar{v}_1$ ~~eg~~
bas!)