

# SF1624 F11 (Kap 6.3 & 6.4)

## 6.3 Nollrum & bildrum: ("kernel & range").

Def: Låt  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  vara linjär avbildning. Då ges nollrummet till  $T$  ("ker(T)") av

$$\ker(T) = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : T(\bar{x}) = \bar{0} \}$$

Sats (6.3.2): Låt  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  vara linj. avb. . Då är  $\ker(T)$  ett delrum till  $\mathbb{R}^n$ .

Bewis: Råcker att kolla slutet under skal. mult. & +.  
övning!

Slutet under +:

Antag att  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \ker(T)$ .

$$\begin{aligned} \text{Då är } T(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) &= T(\bar{x}_1) + T(\bar{x}_2) \\ &= \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}, \text{ dvs även} \end{aligned}$$

$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \in \ker(T)$ .  $\therefore$  slutet under +.  $\square$ .

Sats (6.3.3): Om  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

ges av en  $n \times m$  matris  $A$

(dvs  $T(\bar{x}) = A \cdot \bar{x}$ .) Så ges

$\ker(T)$  av lösningsrummet

för  $A\bar{x} = \bar{0}$ .

Ann: Vi skriver  $\text{null}(A) = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} A\bar{x} = \bar{0} \end{array} \right\}$   
"nullspace".

Hur hitta  $\text{null}(A)$ ? Lös ekvation!

Ex:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .  $A\bar{x} = \bar{0}$

$$\text{ger: } \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Som har lösningen  $x_2 = t$ ,

$x_1 = -t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Dvs:

$$\bar{x} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \therefore \text{null}(A) = \text{Span}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Sats 6.3.5: Låt  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

vara linj. avb. och låt  $W \subset \mathbb{R}^n$

vara delrum. Då är även

$$T(W) = \{ T(\bar{w}) : \bar{w} \in W \} \text{ ett}$$

delrum. (Anm:  $T(W) \subset \mathbb{R}^m$ ).

Bewis: ö, eller se bok.  delmängd!

Def: Låt  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  vara

lin. avb. Då ges  $\text{ran}(T)$

" " " bild " "

( "range", eller bildrummet )

$$\text{an } \text{ran}(T) = \{ T(\bar{x}) : \bar{x} \in \mathbb{R}^n \}.$$

---

$$\text{Ex: } \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow [x+y].$$

$$\text{Ex: } \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ y \end{bmatrix}.$$

Ex: Tas godtycklig  $n \times m$  matrix  
 $A$ , och skicka  $\bar{x} \rightarrow A \cdot \bar{x}$ .

---

Sats 6.3.7 Låt  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   
vara linj. avb. Då är  $\text{ran}(T)$   
ett delrum till  $\mathbb{R}^m$ .

Amm: Om  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  så "bor"  
 $\text{ran}(T) \subset \mathbb{R}^m$  och

$\text{ran}(T)$  "bor i"  $\mathbb{R}^m$ .

Bild:  $\mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^m$

$\subset \quad \quad \quad \subset$

$\text{ker}(T) \quad \quad \quad \text{ran}(T)$

Sats 6.3.8: Om  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

ges av en  $n \times m$  matris  $A$

(dvs  $T(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} \quad \forall \vec{x}$ ) så är

$$\text{ran}(T) = \text{col}(A).$$

↑ kolonnrummet  
till  $A$ .

Def: Låt  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  vara en  
avbildning.

\* Vi säger att  $T$  är surjektiv

("onto") om

$$\{T(\bar{x}) : \bar{x} \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^m.$$

("vi trötter allt").

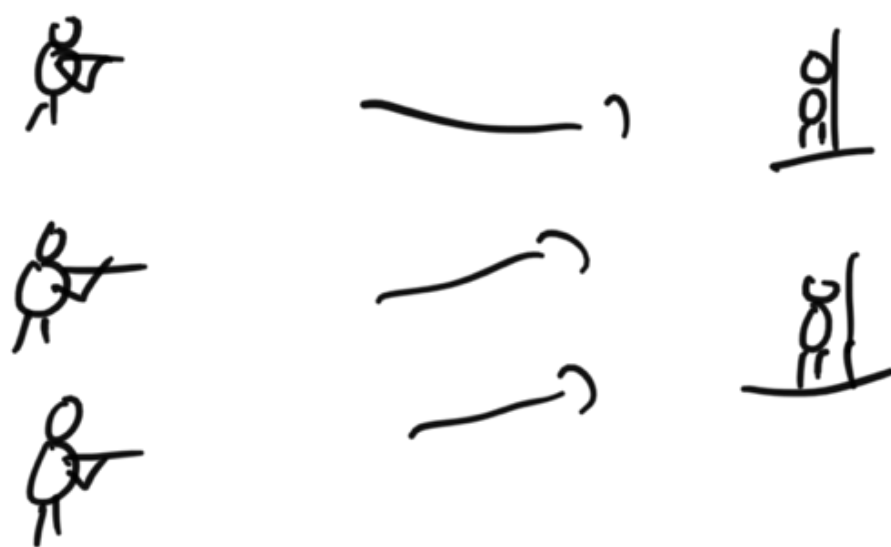
\* Vi säger att  $T$  är injektiv

("one to one" eller "1-1")

$$\text{om } \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$$

$$\Rightarrow T(\bar{x}_1) \neq T(\bar{x}_2).$$

("inga krokar").



$\therefore$  surjektiv: "alla dö" (all doors)

injektiv: "lösas inte kulor" (cannot be solved by balls)

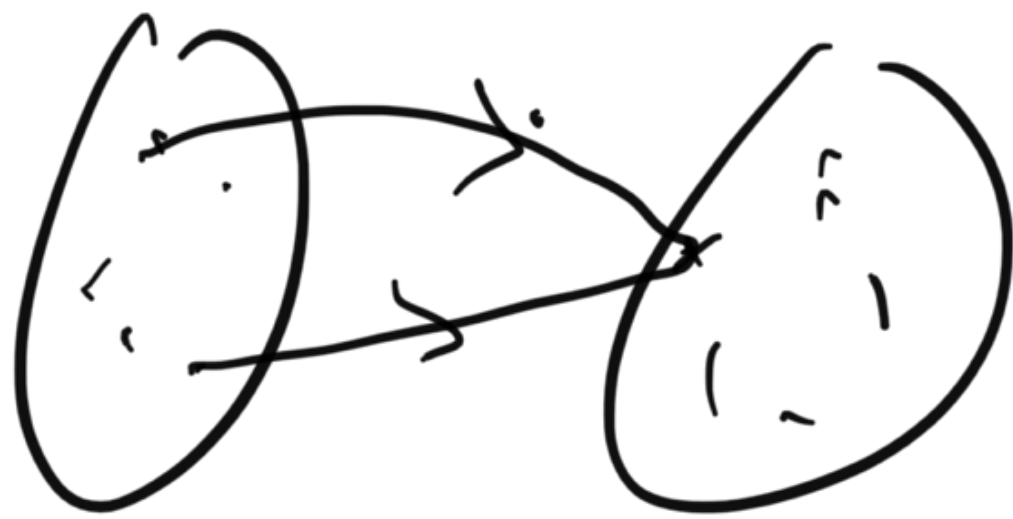
Sats 6.3.11: Låt  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Vana linjär avbildning. Då är  
 $T$  injektiv  $\Leftrightarrow \ker(T) = \{\vec{0}\}$ .

Anm: För linjär ~~av~~ avbildningen

"räcker det att kolla injektivitet  
i nollan".

Ej injektiv:



Def: Givet  $n \times m$  matris  $A$ ,

låt  $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  beteckna

avbildningen  $T_A(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ .

Sats 6.3.12:  $T_A$  är injektiv

$\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$  bara har trivial  
lösning.

Sats 6.3.13:  $T_A$  är surjektiv

$\Leftrightarrow A\bar{x} = \bar{b}$  är konsistent  
 $\forall \bar{b} \in \mathbb{R}^m$ .

Sats 6.3.14: (viktigt!) Låt

$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (obs:  $m=n$ )

vara linjär avbildning. Då

är  $T$  surjektiv  $\Leftrightarrow$

$T$  är injektiv.

Beweiside: både surjektivitet  
& injektivitet kohar ner

til "både ledande eller  
på diagonalen".

(se boh.).

A... monstret växte iakt! i

Sats:  
6.3.15: a) ... , j)

SAKT:

k)  $T_A$  är injektiv.

h)  $T_A$  är surjektiv.

## 6.4 Sammansättning & inverterbarhet

Def: Låt  $T_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  och

$T_2: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  vara linj.

avbildningar. Då ger Samman-

sättningen av  $T_2$  med  $T_1$

en avbildning

$$(T_2 \circ T_1)(\bar{x}) = T_2(T_1(\bar{x}))$$

↑  
Sammansättning

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

Bild:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{T_1} & \mathbb{R}^k & \xrightarrow{T_2} & \mathbb{R}^m \\ \downarrow \varphi & & & \nearrow & \\ & & T_2 \circ T_1 & & \end{array}$$

Ex:  $T_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (x, y) \mapsto (x, y, 0)$   
 $T_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1 \quad (x, y, z) \mapsto (x+y+z)$

$$(T_2 \circ T_1)((x, y)) = T_2(T_1((x, y)))$$

$$= T_2((x, y, 0)) = (x+y+0) \\ = (x+y).$$

$$(T_2 \circ T_1)((x, y)) = (x+y).$$

Satz 6.4.1 (viktig!) :

Let  $T_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  och  
 $T_2: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$T_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ vara}$$

linj. avbildningar.  $T_2$  är

även

$$T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

en linjär avbildning.

Bevis: Räcklar att kolla  
additivitet & ~~lin~~ homogenitet.

Homogenitet: ö!

Additivitet: Om  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \mathbb{R}^n$  för vi:

$$(T_2 \circ T_1)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) =$$

$$T_2(T_1(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)) = [T_1 \text{ linjär}]$$

$$T_2(T_1(\bar{x}_1) + T_1(\bar{x}_2)) = [T_2 \text{ linjär}]$$

$$T_2(T_1(\bar{x}_1) + T_1(\bar{x}_2)) = T_2(T_1(\bar{x}_1)) + T_2(T_1(\bar{x}_2))$$

$$= T_2(T_1(x_1)) + T_2(T_1(x_2))$$

$$= (T_2 \circ T_1)(x_1) + (T_2 \circ T_1)(x_2)$$

$\therefore T_2 \circ T_1$  är additiv.  $\square$ .

Homogenitet:  $T(c \cdot \bar{x}) = c \cdot T(\bar{x})$

( $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ).

Anm: Om  $A$  är  $n \times k$  matris  
och  $B$  är  $k \times m$  matris,  
med motsvarande avbildningar

$T_A$ ,  $T_B$ , så gäller:

$$T_B \circ T_A = T_{B \cdot A}$$

$\uparrow$   
 Samman-  
 m.

$\uparrow$   
 matris produkt!

setting.

(Notera:  $B \cdot A$  är en  $n \times m$  matrix.).

## Invers av linjära avbildningen

Låt  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  vara

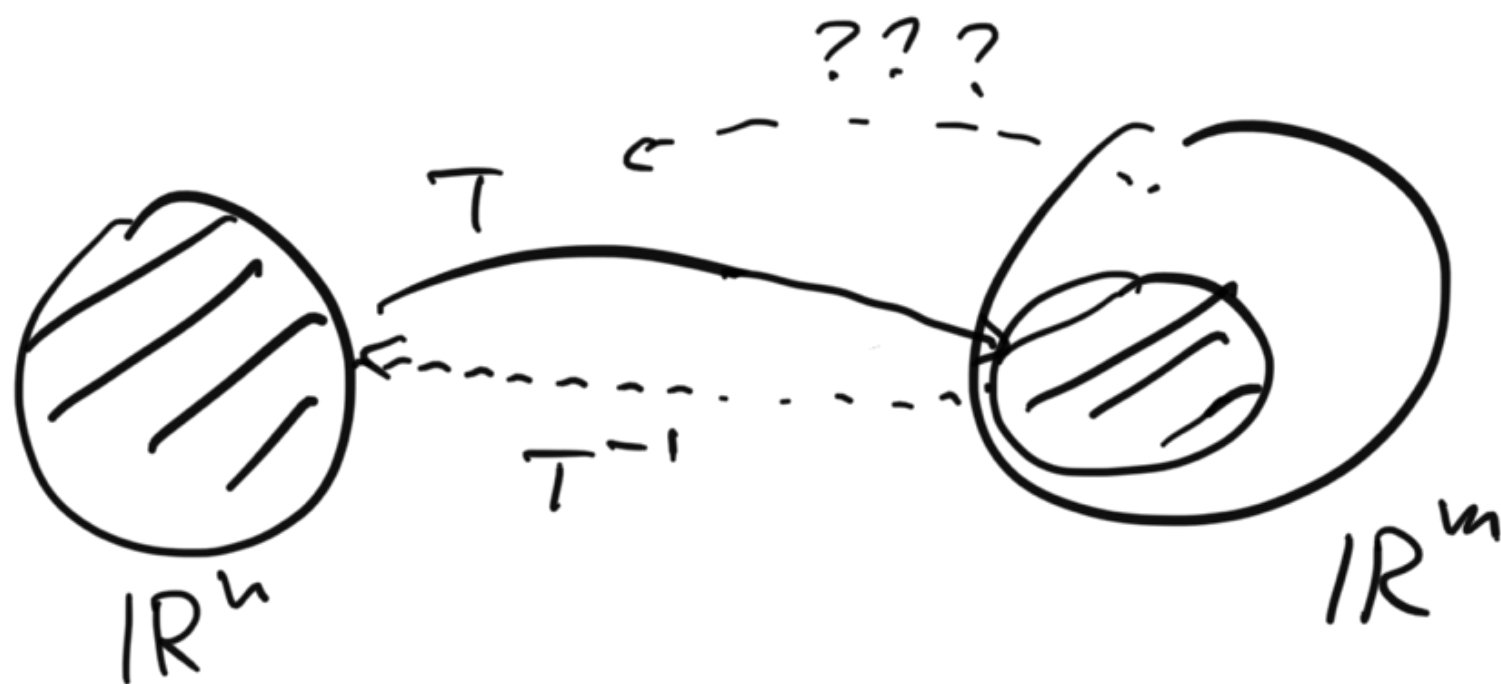
linjär avbildning. Om  $T$  är

injektiv kan vi definiera

en invers avbildning

$$T^{-1}: \text{ran}(T) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

↑  
?



Poäng: allt i  $\text{ran}(T)$  träffas;

injektivitet  $\Rightarrow$  träffa

Precis en gång. Vi kan då  
"gå baklänges".

Egenskaper:

$$\begin{cases} T(T^{-1}(\bar{w})) = \bar{w} & \forall \bar{w} \in \text{ran}(T) \\ T^{-1}(T(\bar{x})) = \bar{x} & \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Bild:



OBS!

Sats 6.4.6: Låt  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

vara linj. avb. Om  $T$

är injektiv så är standard-  
matrisen för  $T$  inverterbar,  
och dess invers ges av  
standardmatrisen för  $T^{-1}$ .

Bevis: se bok.

---

Start: "mystisk"  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

(men  $T$  injär)  $\Rightarrow$

Så finns det  $n \times m$  matrix

$A$  så att  $T(\bar{x}) = A \cdot \bar{x}$ .



"standard matrix for  $T$ ".

---

Invertibara avbildningar på  $\mathbb{R}^2$   
& geometri (s. 314) ..

Sats 6.4.7: Antag att  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

är injektiv. Låt  $L, L_1, L_2$

beteckna linjer i  $\mathbb{R}^2$ .

Då gäller:

a)  $T(\text{linje}) = \text{linje}$   
~~(annan)~~  
 (kan vara en annan linje).

b)  $\bar{0} \in T(L) \Leftrightarrow \bar{0} \in L.$

c)  $T(L_1)$  &  $T(L_2)$  parallella  
 $\Leftrightarrow$   
 $L_1$  &  $L_2$  parallella.

d) Låt  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \in \mathbb{R}^2$ . Då  
 gäller:

$T(\bar{x}_1), T(\bar{x}_2), T(\bar{x}_3)$  ligger

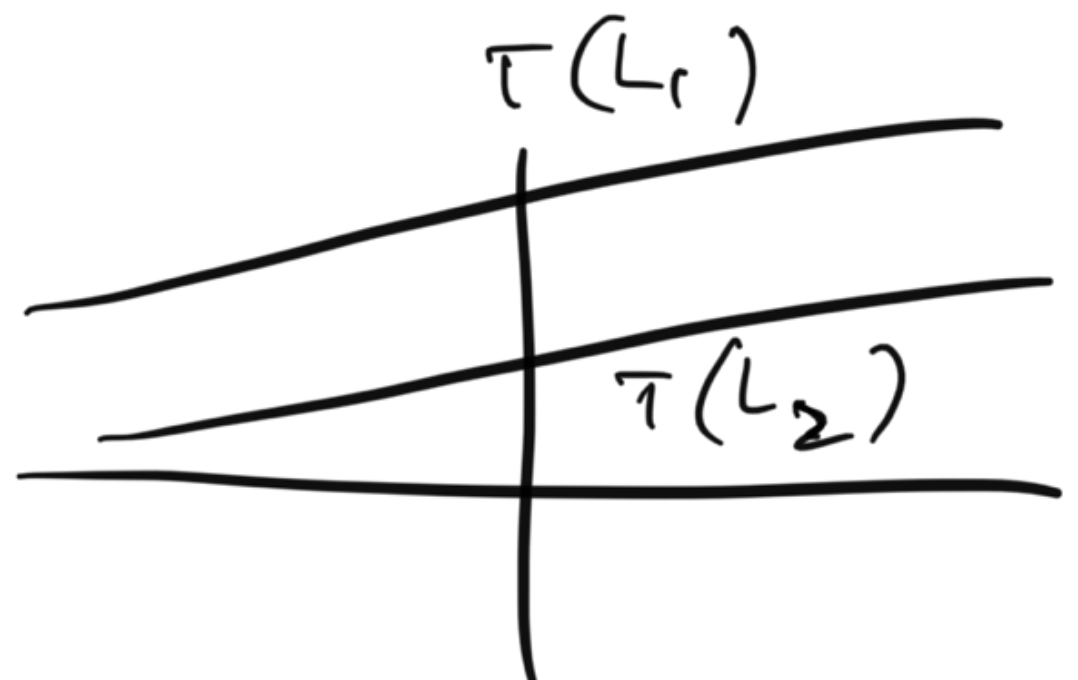
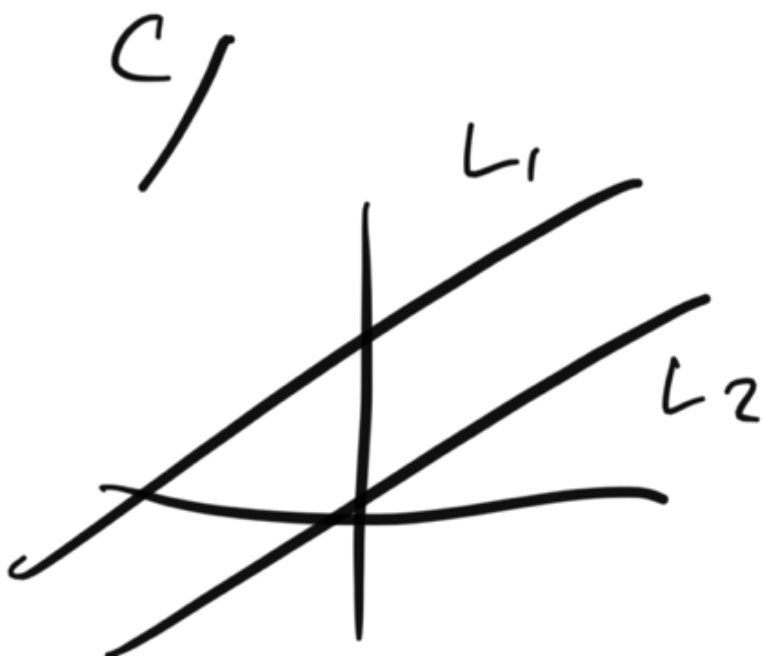
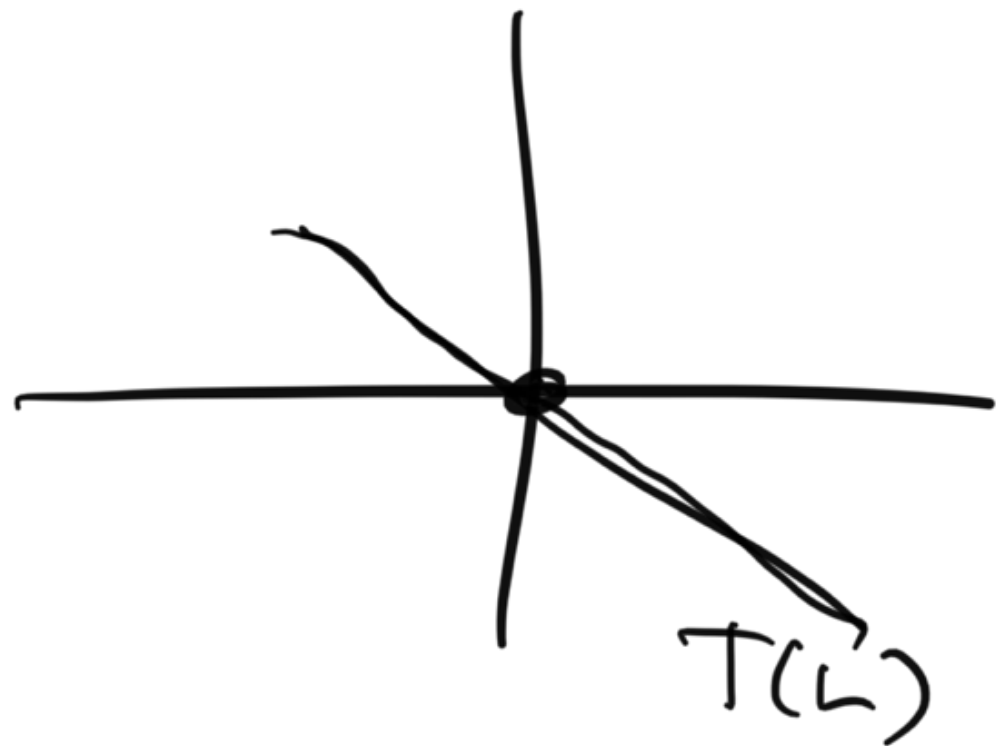
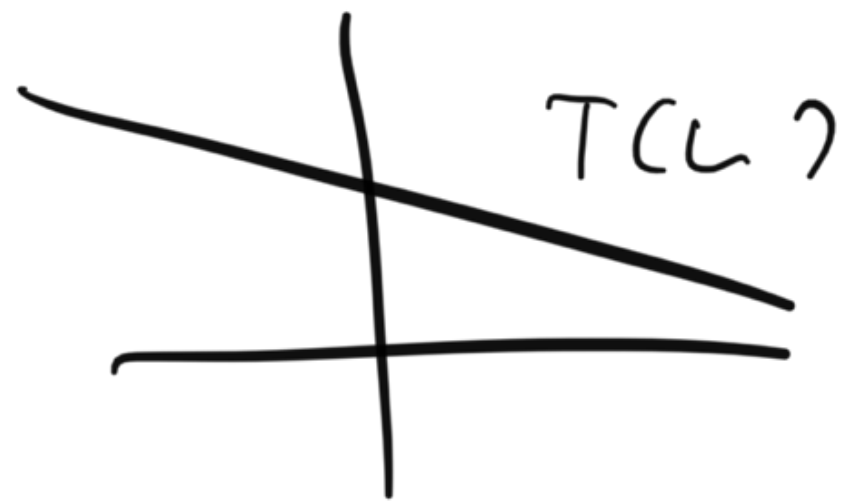
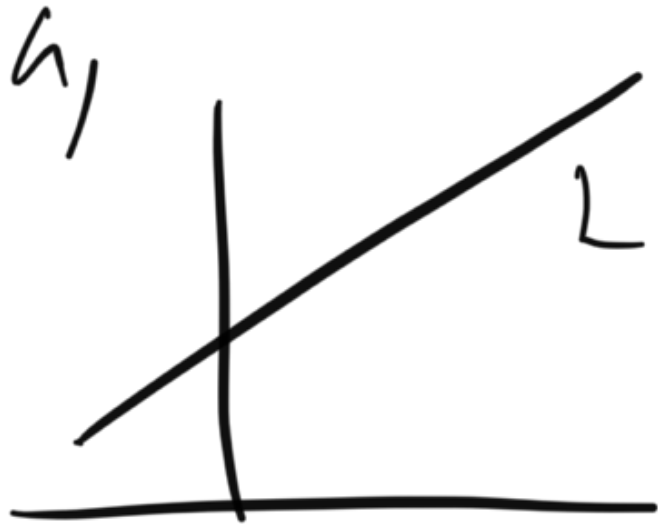
på linje

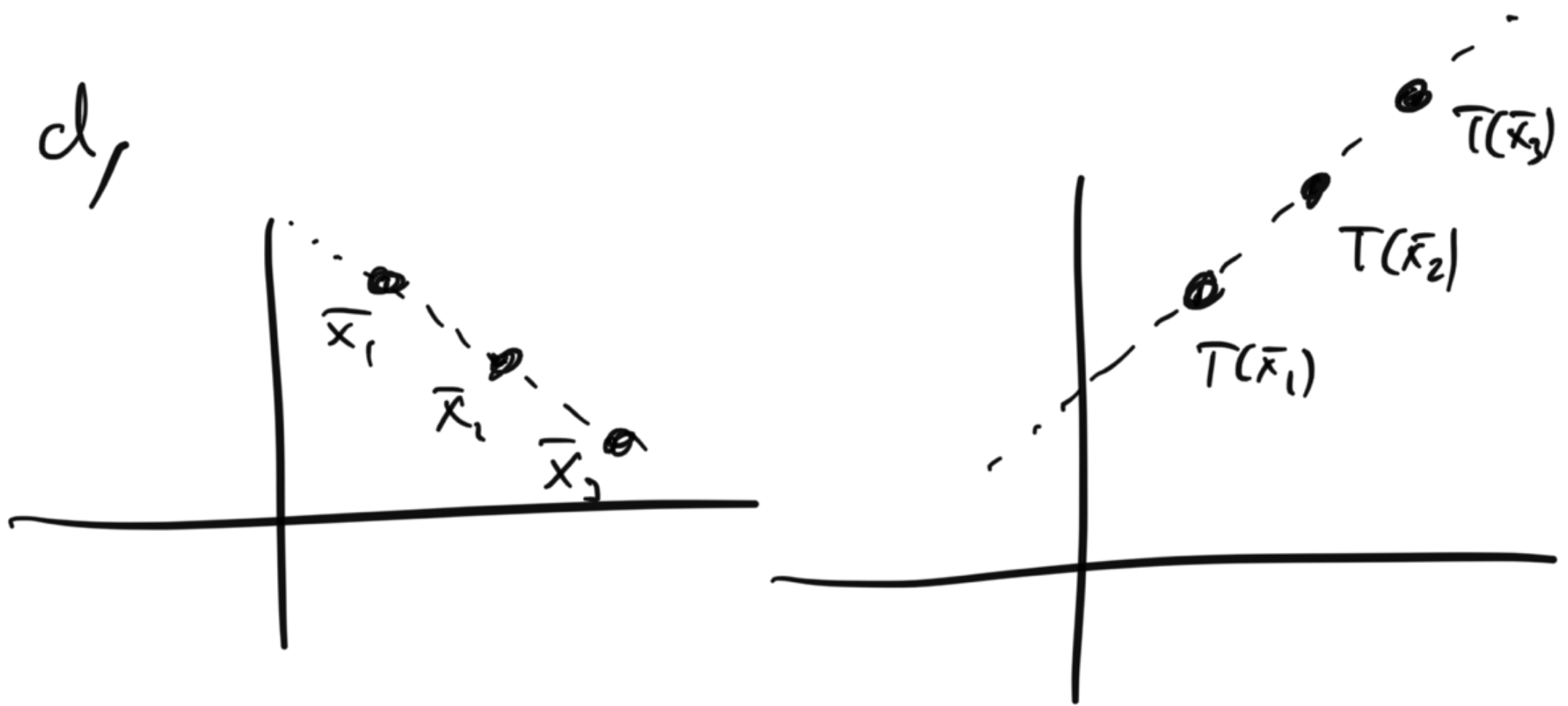
$\Leftrightarrow$

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$  ligger på linje.

e) (något för linje segment)

(... symmetrisch,  
 se boh.)






---

Additive: