

SF1624, F10 (4.4, 6.1-2).

4.4 intro till egenvärden/egenvektorer

Fråga: Givet en matris A , för vilka $\lambda \in \mathbb{R}$ finns det $\bar{x} \neq 0$ så att

$$A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x} \quad \left(\begin{array}{l} \text{"riktningen } \bar{x} \text{ skadas} \\ \text{om av } A" \end{array} \right)$$

Def: Givet en $n \times n$ matris A ,

sågs $\lambda \in \mathbb{R}$ vara ett egenvärde

(till A) om det finns $\bar{x} \neq 0$

så att

$$A \cdot \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x} \quad \bar{x} \text{ sågs vara}$$

egenvektorn som svarar mot λ .

Hur hitta λ ? Det!

$$\text{Notera: } A \bar{x} = \lambda \bar{x} \quad (\bar{x} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda \cdot I) \bar{x} = 0 \quad \text{homogent.} \quad (\bar{x} \neq 0).$$

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0.$$

Sats (4.4.4): Låt A vara en $n \times n$ matris,
och $\lambda \in \mathbb{R}$. Då är följande
ekvivalenter:

a) λ är ett egenvärde till A .

b) λ är en lösning (rot)
till $\det(\lambda I - A) = 0$.

(Anm. Ibland: $\det(I - \lambda I) = 0$).

c) $(\lambda I - A)\bar{x} = \bar{0}$ har en
icke trivial lösning (dvs $\bar{x} \neq \bar{0}$.)

$$\lambda \cdot I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - A$$

↑
"gör om
till matris".

λ - A
↑
ℝ

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -4 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \det = ad - bc \\ \text{om } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

polynom avgrad
 $n=2$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2) - (-3)(-4) =$$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 12 = \lambda^2 - 3\lambda - 10$$

Rötter: $\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3^2}{4} + 10} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} =$

$$= \frac{3}{2} \pm \frac{7}{2}$$

$\therefore \lambda_1 = 5$ & $\lambda_2 = -2$ är
egenvärden till A .

Egenvektorer till hövande $\lambda = \lambda_1 = 5$:

Lös $(\lambda I - A)\bar{x} = (5I - A)\bar{x} = \bar{0}$, dvs

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & ; & 0 \\ -4 & 3 & ; & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Tips: om vi räknat rötter rätt
SKALL det finnas icke-trivial
lösning!)

— [3] a...

$\Rightarrow$ tex är $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ för en
icke-triv. lösning.

(Alt: räkna på med s, t etc
 $\leadsto$ $\bar{x}$ på formen $\bar{x} = t \cdot \begin{bmatrix} 3/4 \\ 1 \end{bmatrix}$,
 $t \in \mathbb{R}$ är lösning.)

Anm: $\bar{x}$ är egenvektor $\Rightarrow$
 $k \cdot \bar{x}$ är egenvektor ($k \neq 0$).

$$\begin{aligned} 4 \cdot 3 - 3 \cdot 4 &= 0 \\ 4x_1 - 3x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Aha: $x_1 = 3, x_2 = 4$ fungerar!

(Kan även ta: $x_1 = 6, x_2 = 8$.)

Ö: tag ~~A_2~~ $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -2$ och
Räkna andra egenvektorer.

Anm: $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\leadsto \lambda_1 = ?, \lambda_2 = ?$$

Ofta ~~strukturer~~ skrivs:

Hitta första egenvektorn $\bar{x}_1$
och andra $\sim \sim \sim \bar{x}_2$.

$$(\lambda_1 I - A) \bar{x}_1 = \bar{0}$$

$$(\lambda_2 I - A) \bar{x}_2 = \bar{0}.$$

Anm: $\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ s.d. att } (\lambda \cdot I - A) \bar{x} = \bar{0} \}$

kallas för egenrummet till hörande λ .

Sats: Om A är triangulär

$n \times n$ matris så ges egenvärdena
till A av diagonalelementen!

Bewis: $\bar{0}$!

$\cap \cap \cap$

Ex: $A \approx \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A) =$
 $= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

Haha!! $\lambda_1 = 1$ & $\lambda_2 = 3$
 är egen värden.

Anm: monstret växte just!
 (se Sats 4.4.7.).

Anm: Kan hända att
 $\det(\lambda I - A)$ har komplexa
 rötter $\rightarrow$ svarar till senare.

Anm: Skriver ibland

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A);$$

och $P_A(\lambda)$ kallas det

Karakteristiska polynomet
 för A .

... att polynomet

Viktigt: A är en polynom

av grad n (om A är
 $n \times n$ matris.).

Öö: visa detta!

Sats 4.4.8: Låt A vara en

$n \times n$ matris med karakteristiskt

polynom $P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

$$= (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

där $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ är

distinkta (olika) rötter till

$P_A(\lambda)$, med algebraisk multiplicitet

$m_1, m_2, \dots, m_k$. Då är

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n.$$

Ex: $(x-1)^2(x-2)^1$ har grad 3

$$2 + 1 = 3.$$

$(x-1)^1(x-2)^1$ har grad 2 =

$$= 1 + 1$$

Beviside: Faktorisera $P_A(\lambda)$
som polynom, jämför sedan
gradtal.

Ö: bevisa att $P_A(\lambda)$ har
grad 2 om A är 2×2
matris.

Se sats 4.4.9 för klassificering
av olika 2×2 möjligheter.

Sats 4.4.11 ("Spektralsatsen, lätt").

Låt A vara en symmetrisk 2×2
matris (dvs $A^T = A$)

Di är alla egenvärden reella!

• Om $P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^2$ är

$$\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ så att } (\lambda_1 I - A) \bar{x} = \bar{0} \} \\ = \mathbb{R}^2. \quad (\text{Hela } \mathbb{R}^2!)$$

Start lösningssum.).

- Om $P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$
 Sîc sîr motsvarande egenvektorer
 $\vec{x}_1$ & $\vec{x}_2$ ortogonale.

En övning till: Låt A vara 2×2 matrix.

* Def: $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(A) + \det(A)$.

Sats 4.4.12. Låt A vara en $n \times n$ matris, med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (med multiplicitet)

$$D_c^p \approx v :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \\ \det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i \end{array} \right.$$

Anm: $A \bar{x} = \lambda \cdot \bar{x}$

$$\Rightarrow A^n \bar{x} = \lambda^n \cdot \bar{x}.$$

.. 1 { dyker ibland

G: visa:

upp p: tentor!

Ö: läs kap. 5.4 - "första har
google
funken",

Pagerank $\longleftrightarrow$ egenvektor.

(!!!)

6.1 Matriser som avbildningar

Def: En avbildning $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Sägs vara linjär om följande

gäller $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$

$$1) \quad T(c \cdot \vec{u}) = c \cdot T(\vec{u}).$$

("homogenitet").

$$2) \quad T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$$

("additivitet").

Ex: Låt A vara en $n \times m$ matris. Då är

$$T(\bar{x}) = A \cdot \bar{x} \quad \text{en linjär}$$

avbildning.

Ö: visa.

$$(\text{Pröv: } A \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = A \cdot \bar{x}_1 + A \cdot \bar{x}_2.) \\ \text{etc.}$$

Fråga: finns det andra sätt
att smickra ihop linjära
avbildningar (från $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$)?

NEJ!

Sats: Låt $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

vara en linjär avbildning.

Det finns en $n \times m$ matris A

$$\text{Så att } T(\bar{x}) = A \cdot \bar{x} \quad (\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n).$$

Dessutom: A är på formen:

$$A = \begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & T(\bar{e}_2) & \dots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix}.$$

↑
kallas för "Standardmatris för T ".

"följ enhetsvektorena, som en

BLOOD HUND! ".

Bevis: se bok.

För geometriska exempel/tolkningar
av avbildningar på $\mathbb{R}^2$,

se 273-276 i boken.

(rotation, spegling, projektion).

6.2 (Geometri & linjära avbildningar)

"operator" /

Def: En ^{linjär} avbildning $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

Sägs vara en isometri (avstånds-
bevarande)

om $|T(\bar{x})| = |\bar{x}| \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Sats: (6.2.1) Låt $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

vara linjär avbildning. Då är
följande ekvivalenta:

a) $|T(\bar{x})| = |\bar{x}| \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$
(bevarar avstånd).

b) $T(\bar{x}) \cdot T(\bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y} \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$
(bevarar skalärprodukt
 $\leadsto$ lite som: bevarar vinklar.)

Beweis: $b) \Rightarrow a)$ Om $b)$ gäller

för vi $(\forall \bar{x})$ att

$$T(\bar{x}) \cdot T(\bar{x}) = \bar{x} \cdot \bar{x} \implies$$

$$|T(\bar{x})|^2 = |\bar{x}|^2 \implies |T(\bar{x})| = |\bar{x}|.$$

Klart! ;)

$\Leftarrow$: ö. ledträd: börja med att visa att:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1}{4} (|x+y|^2 - |x-y|^2).$$

Ortogonala matriser.

Def: En $n \times n$ matris som uppfyller $A^{-1} = A^T$ sägs vara en ortogonal matris.

Sats 6.2.3

a) A ortogonal $\implies A^T$ ortogonal.

b) A ortogonal $\implies A^{-1}$ ortogonal

c) A, B ortogonala $\implies A \cdot B$ ortogonal.

d) A ortogonal $\implies \det(A) = \pm 1$.

Beweis av c): A, B ortogonala

$$\Rightarrow A^{-1} = A^T, \quad B^{-1} = B^T$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} &= B^{-1} \cdot A^{-1} = \cancel{A^T} B^T \cdot A^T = \\ &= (A \cdot B)^T. \quad \text{Klart!} \quad \ddot{\smile} \end{aligned}$$

Sats 6.2.5: Om A är en $n \times n$ matris är följande ekvivalenta:

a) A är ortogonal.

b) $|A\bar{x}| = |\bar{x}| \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n.$

c) $(A\bar{x}) \cdot (A\bar{y}) = \bar{x} \cdot \bar{y} \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n.$

d) Kolonnvektorerna i A är
ortogonala.

e) Radvektorerna i A är
ortogonala.

(Anm: Se Sats 6.2.5 för
 $n \times m$ variant (utan e).)

Beweis av $a_j \Rightarrow b_j$:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= A^T \Rightarrow |A\bar{x}|^2 = \\ &= (A\bar{x}) \cdot (A\bar{x}) = (A\bar{x})^T \cdot (A\bar{x}) = \\ &= (\bar{x}^T A^T) \cdot (A\bar{x}) = (\bar{x}^T A^{-1}) \cdot (A\bar{x}) = \\ &= \bar{x}^T \cdot (A^{-1}A) \cdot \bar{x} = \bar{x}^T (I) \cdot \bar{x} = \bar{x}^T \cdot \bar{x} \\ &\quad T = I \\ &= \bar{x} \cdot \bar{x} = |\bar{x}|^2. \end{aligned}$$

$$\therefore a_j \Rightarrow |A\bar{x}|^2 = |\bar{x}|^2 \Rightarrow |A\bar{x}| = |\bar{x}|.$$

Klart! $\ddot{\smile}$.

Följdsats: (6.2.6) En avbildning

$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ är ortogonal

$\Leftrightarrow$ Standardmatrisen för A
är ortogonal.