

# SF1624, Fr1 #1

Admin: allt (!?) du behöver  
veta finns i Canvas  
(Kursbok, upplägg, etc, etc)

Tjatt: registrera er NU! ;  
(via "mina sidor".)

Lite om struktur: Varje vecka  
↔ modul.

Upplägg: F F Ö F Ö S  
          ↑      ↑      ↑  
föreläsning  övning  seminarie  
                                  (gör bonus!)

Tips: ① Läs bok!

② Räkna så mycket du  
orkar!

Frågor?

# Vektorer (kap 1.1)

$\mathbb{R}^2$  : "planet"

$\mathbb{R}^3$  : "rummet"

$\mathbb{R}^n, n \geq 4$  : !?

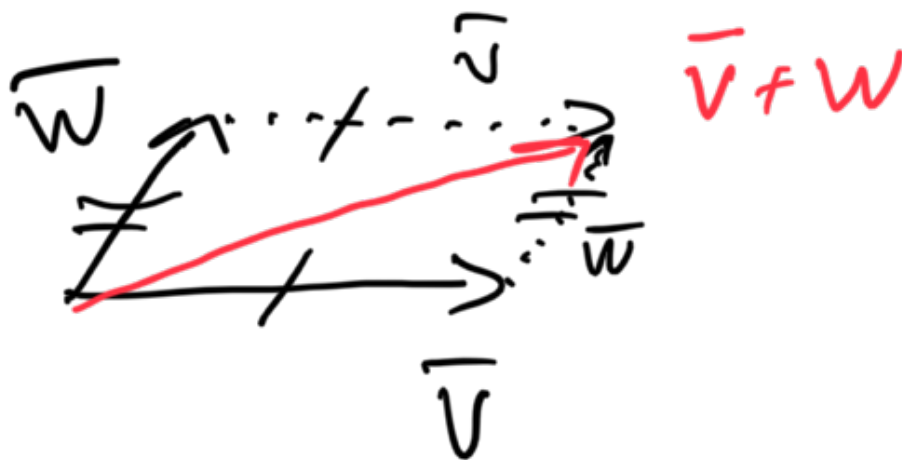
Geometrisk tolkning, särskilt i  $\mathbb{R}^2$

vektorer  $\leftrightarrow$  "pilar i planet"

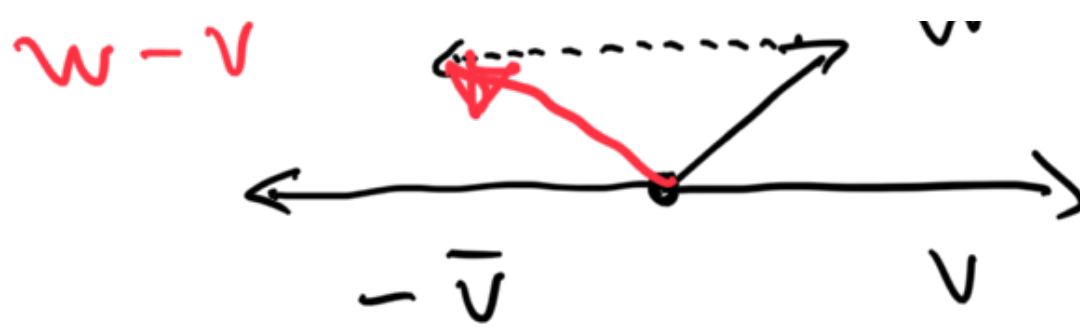
Att:  $\mathbb{R}$   
 $\vec{a}$  - mängden  
av reella tal.



Addition:



Subtraktion:



Anm:  $\bar{w} - \bar{v} = \bar{w} + (-\bar{v})$

↑  
motsatt  
riktning!

Skalar multiplikation:

givet  $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$  och  $t \in \mathbb{R}$

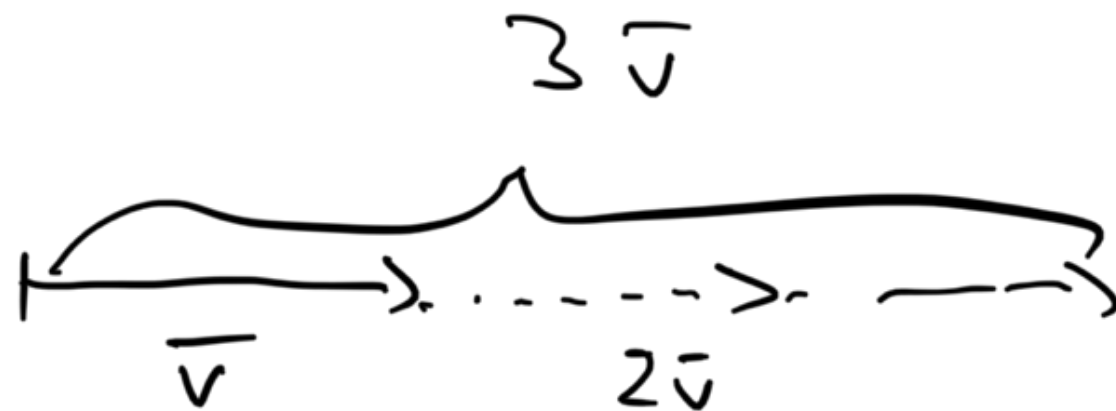
↑  
"tillhör"

( $t$  är en "skalar") gäller

$$t \cdot \bar{v} \in \mathbb{R}^2$$

$$t = 2, 3$$

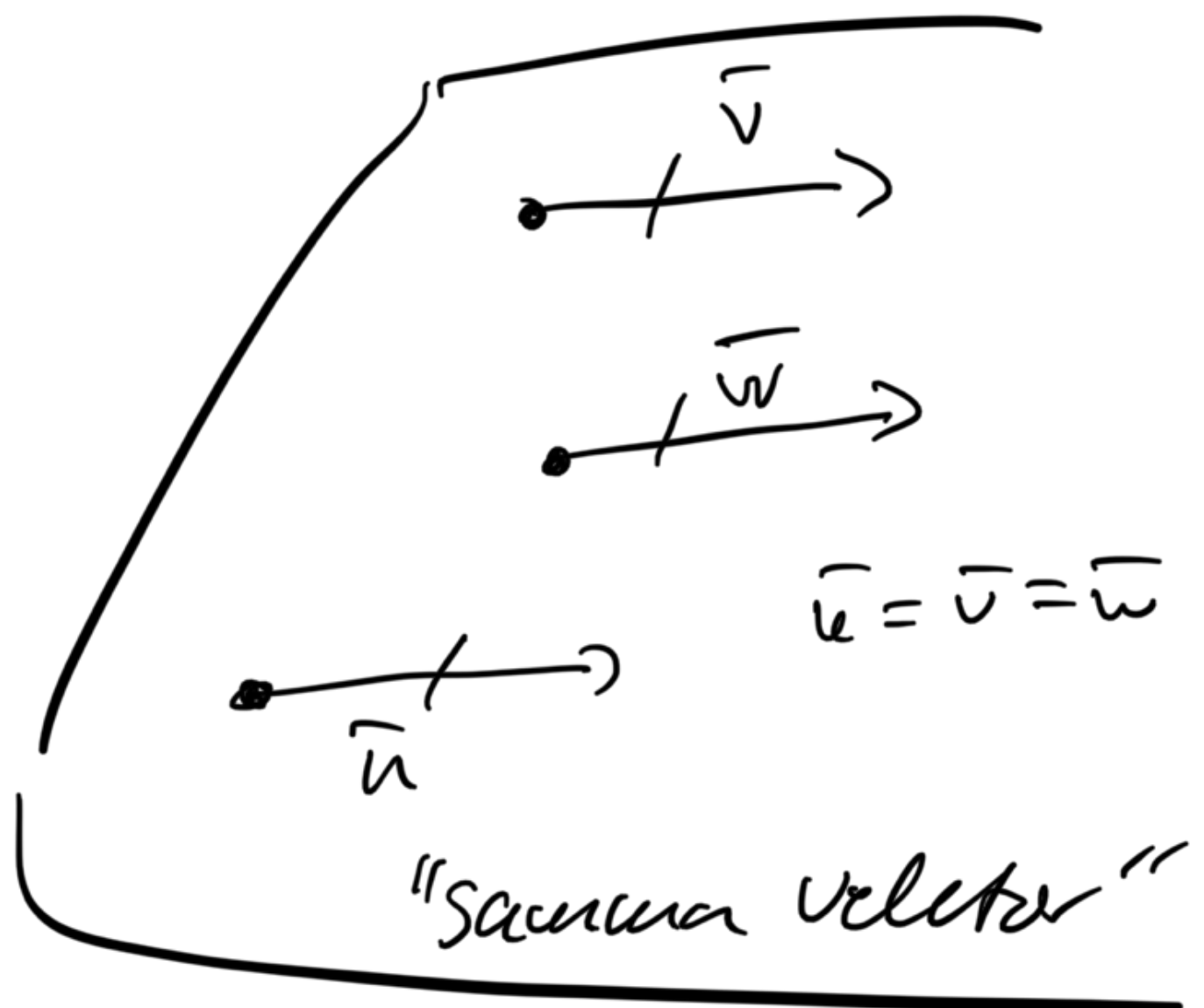
Ex:



$$\frac{1}{2} \cdot \bar{v}$$

$$(-1) \cdot \bar{v}$$

$$\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \bar{v}$$



$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{w}$$

$$(-1) \cdot (-\bar{v}) = \bar{v}$$

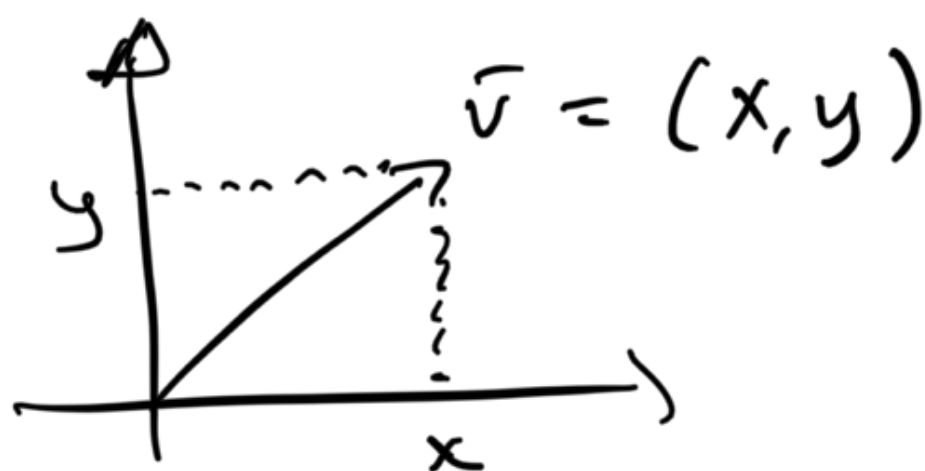
$$\bar{v}$$

$$-\bar{v}$$

$$(-1) \cdot (-\bar{v}) = \bar{v}$$

"Contemporary linear algebra"  
 by Anton & Busby. (304)

Koordinater:



Ex:  $\vec{v} = (1, 2)$

(Anm: vad händer om  
vi använder snett koord. system  
Ex



(i  $\mathbb{R}^3$ :  $\vec{v} = (x, y, z)$  (eller  
 $(x_1, x_2, x_3)$   
eller  
 $(v_1, v_2, v_3)$ ),

Addition mha koordinater:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Skalar mult. mha koordinater:

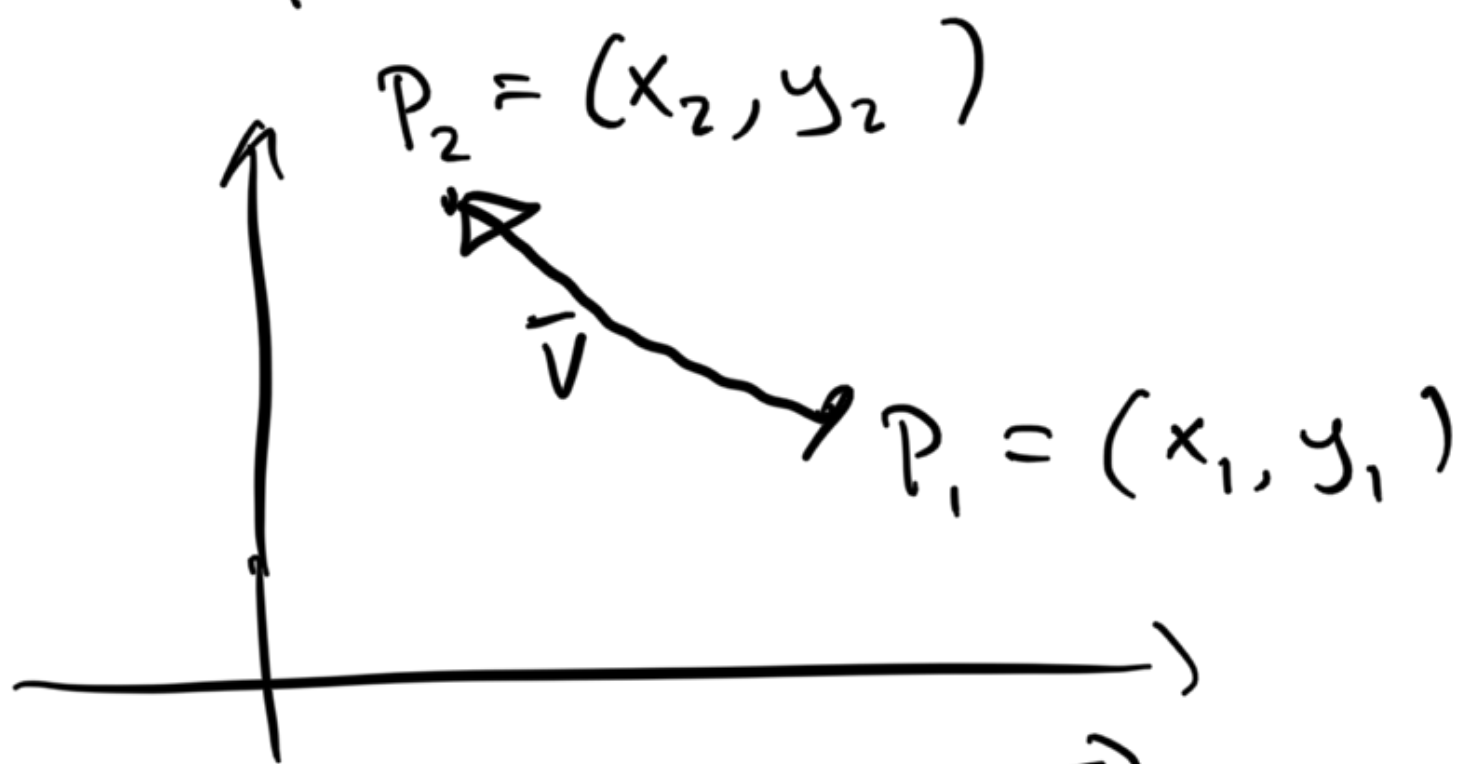
$$t \cdot (x, y) = (t \cdot x, t \cdot y)$$

Ex:  $\frac{1}{2} \cdot (1, 2) = \left(1 \cdot \frac{1}{2}, 2 \cdot \frac{1}{2}\right)$

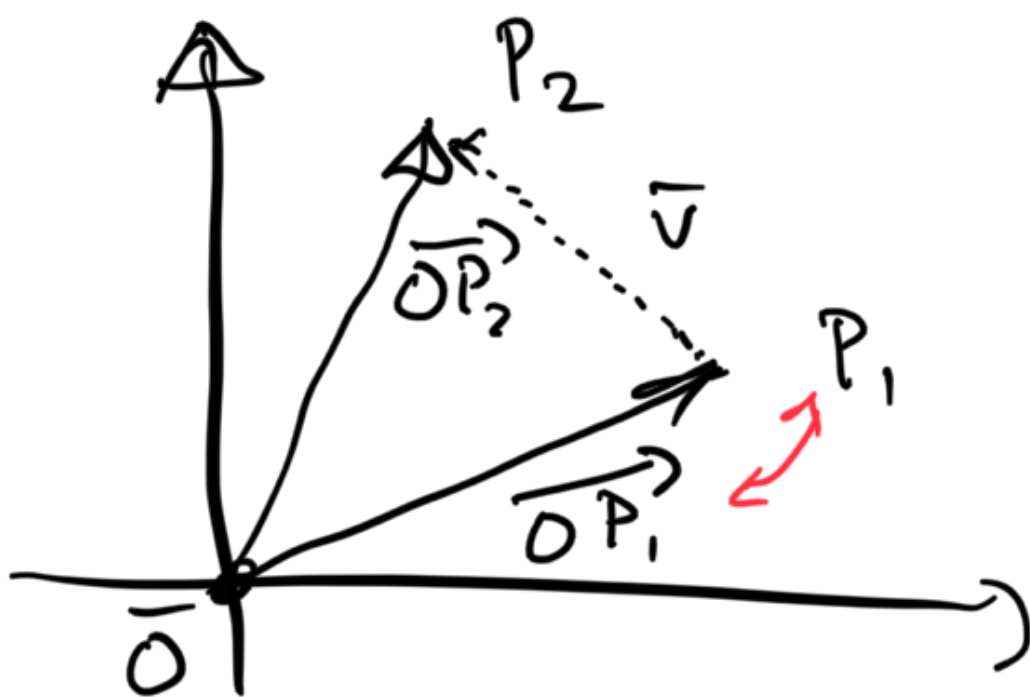
$$\left(\frac{1}{3} \cdot 1, \frac{1}{3} \cdot 2\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Notation for 'riktad ströcker'  
 mellan punkterna  $P_1, P_2$   
 i planet:



skriv:  $\vec{v} = \overrightarrow{P_1 P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$



$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1 P_2} =$$

$$= \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$

(ibland)

Ann:

(Att till)

bok:  (145111)

$\vec{v}$

$\vec{v}$

$v$

$\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  något heltal

$$\mathbb{R}^n = \left\{ (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \text{ s\ddot{o} att} \right. \\ \left. x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

↑  
"m\ddot{a}ngden av alla "n l\ddot{e}nga" vektorer

Def:  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  s\ddot{a}gs vara lika

$$\Leftrightarrow u_1 = v_1, u_2 = v_2, \dots, u_n = v_n.$$

Def (vektoraddition): Givet  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  och  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

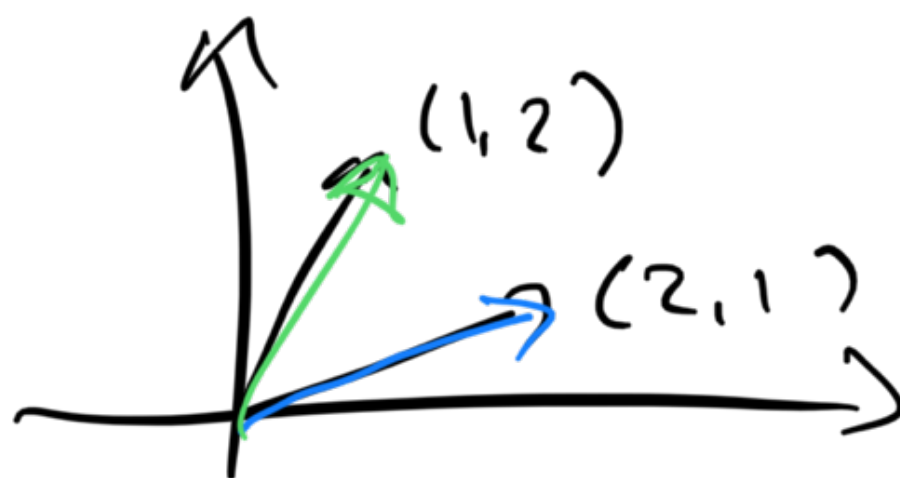
s\ddot{o} definierar vi

$\vec{u} + \vec{v}$  som vektorn

$$\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n).$$

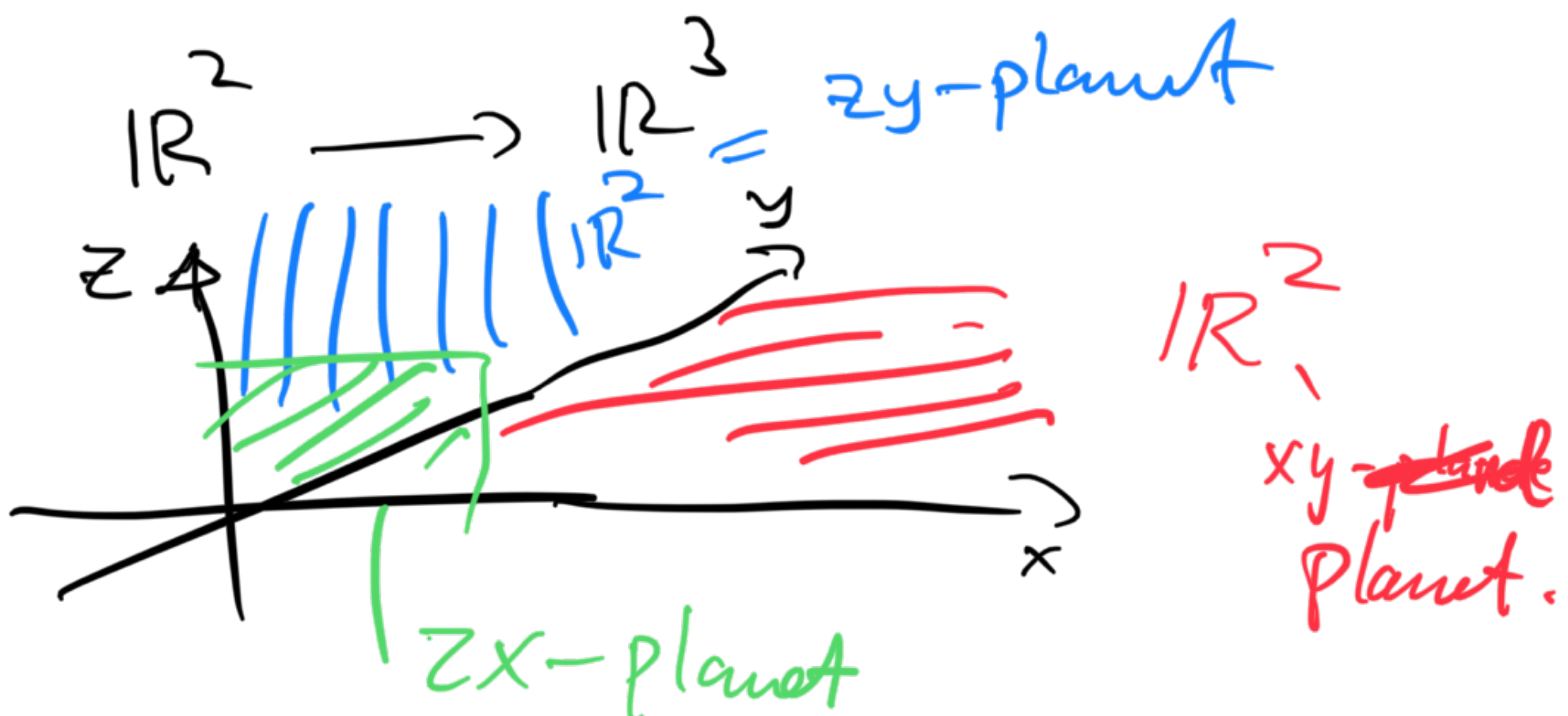
(Anm: se det 1.1.4 för t.  $\bar{v}$ ,  
om  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$  ~~ist~~  
Samt  $-\bar{v}$ ,  $\bar{w} - \bar{v}$ )

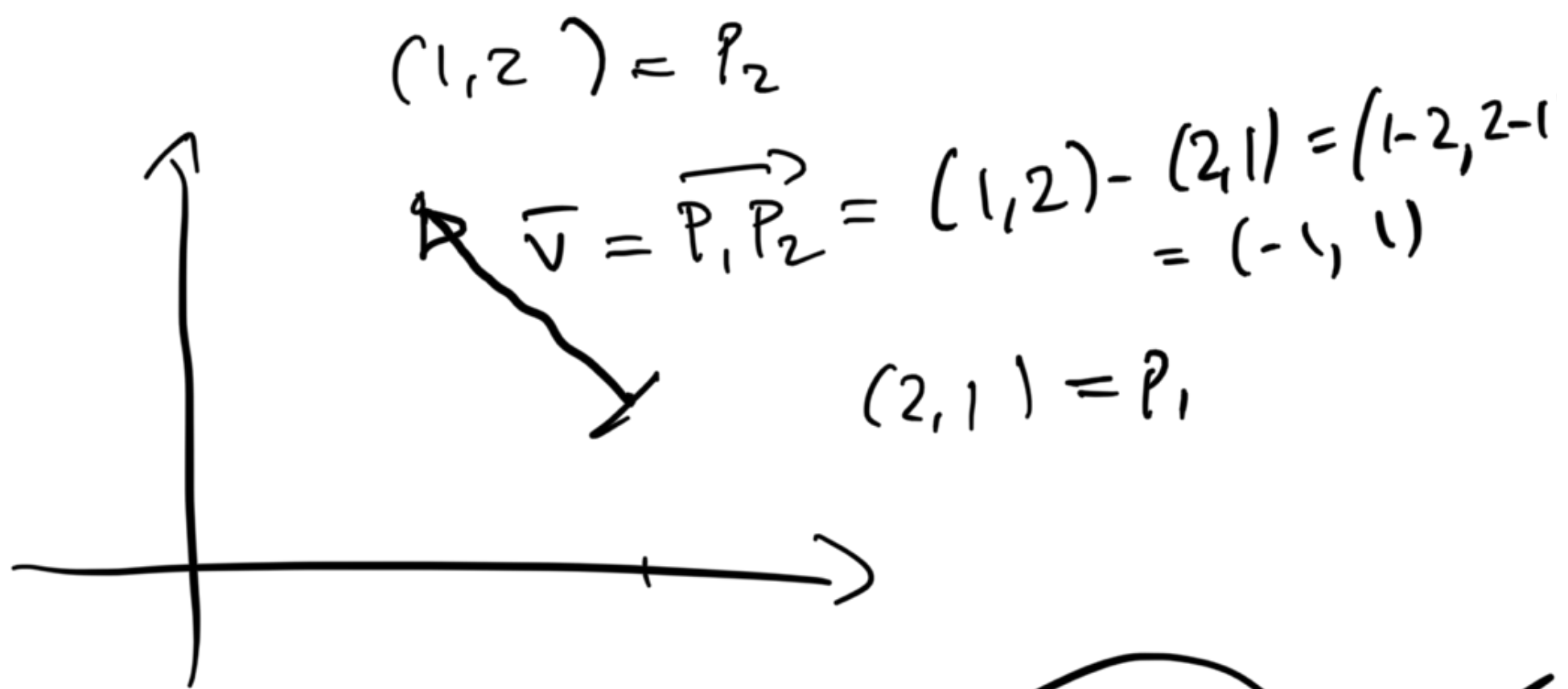
Anm:  $(1, 2) \neq (2, 1)$



$\{1, 2\}$   
 $= \{2, 1\}$   
Men:

$$\underset{\in \mathbb{R}^2}{(1, 2)} = \underset{\in \mathbb{R}^3}{(1, 2, 0)} \quad \text{Nej!}$$





Sats (triviala räkne regler):

Låt  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ . Då gäller:

a)  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

b)  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

$\vdots$  } Se bok!

c)  $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Öv: visa detta!

Sats 1.1.6:

a)  $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$

b)  $t \cdot \vec{0} = \vec{0}$

c)  $c \cdot \vec{u} = -\vec{v}$

nollvektorn i  $\mathbb{R}^n$ ,  
dvs  $\vec{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$   
 $\uparrow$   
n st.

(+änk!)

Def:  $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$  är parallella  
om det finns  $t \in \mathbb{R}$  så  
att  $\bar{u} = t \cdot \bar{v}$  eller  
 $\bar{v} = t \cdot \bar{u}$ .

Anm:  $\bar{0}$  är parallell  
med alla vektorer.

Def: 1.1.8: Vi säger att  $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$   
är en linjär kombination av  
givna vektorer  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$

Om vi kan hitta skalärer  
 $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$  så att

$$\bar{w} = c_1 \cdot \bar{v}_1 + c_2 \cdot \bar{v}_2 + \dots + c_k \cdot \bar{v}_k$$

$$\left( = \sum_{i=1}^k c_i \cdot \bar{v}_i \right).$$



10 ... att ...

Anm/varning: Tre säll van

skrivna  $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ :

(1)  $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ .

(2)  $\bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$  (eller  $\bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ )

es  
samma!

det skrivna  $\bar{v}$  som  
"kolonnvektor".

Varning: finns även radvektor

$\bar{w} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]$

EJ

samma

som  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$

inga kommatecken!

ORTOGONALITET

Skalarprodukt & ortogonalitet (1.2)

Def: Givet  $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

definierar vi längden (eller

normen) av v form

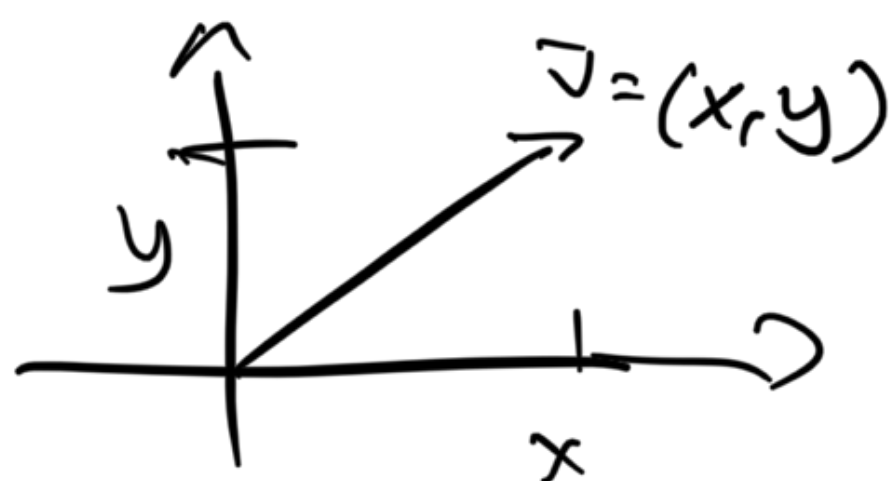
$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

(Anm: ibland skriver man  $\|\vec{v}\|$ .)

Ex:  $\vec{v} = (x, y) \Rightarrow$

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Pythagoras!



Egenskaper (se sats 1.2.2)

•  $|\vec{v}| \geq 0$

•  $|\vec{v}| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

•  $|t \cdot \vec{v}| = |t| \cdot |\vec{v}|$

(bättre?:  $\|t \cdot \vec{v}\| = |t| \cdot (\|\vec{v}\|)$ )

abs. belopp

norm

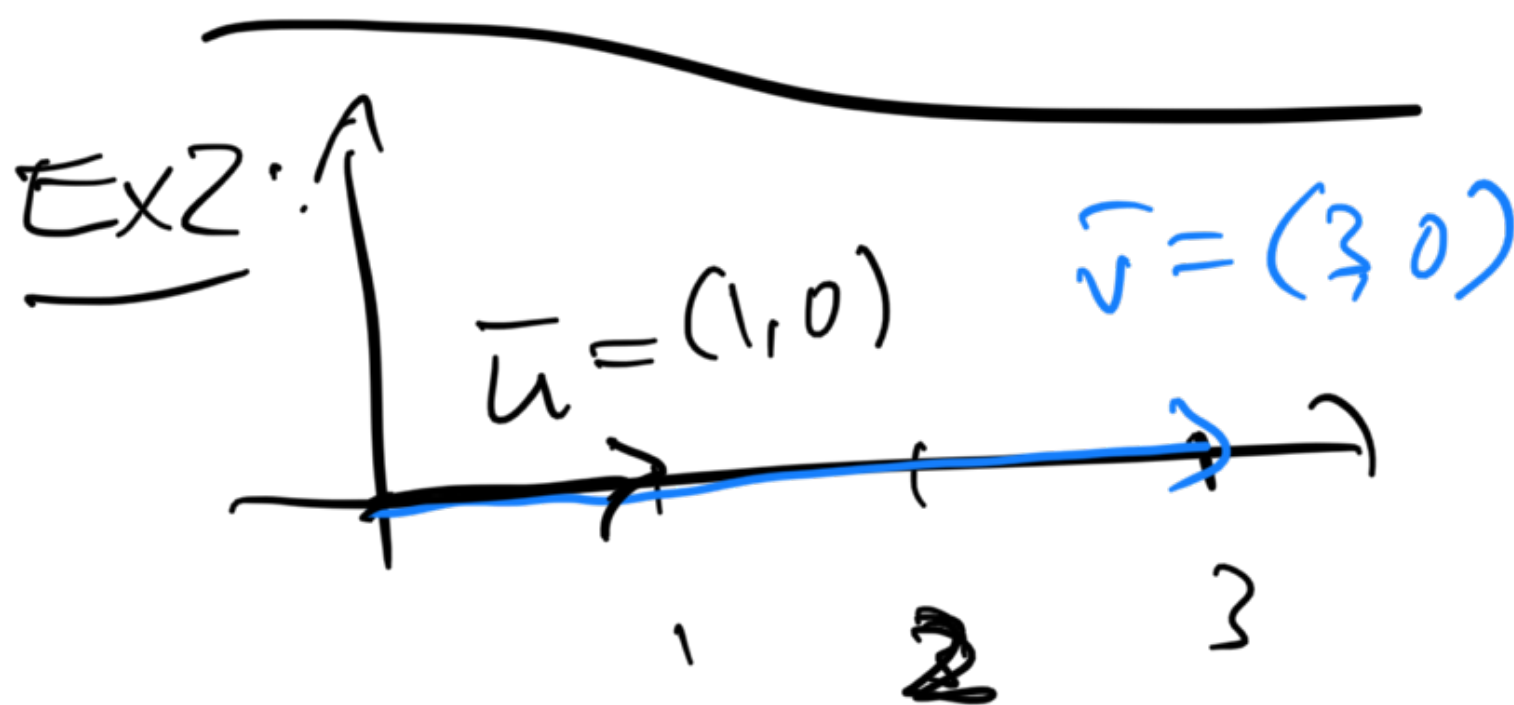
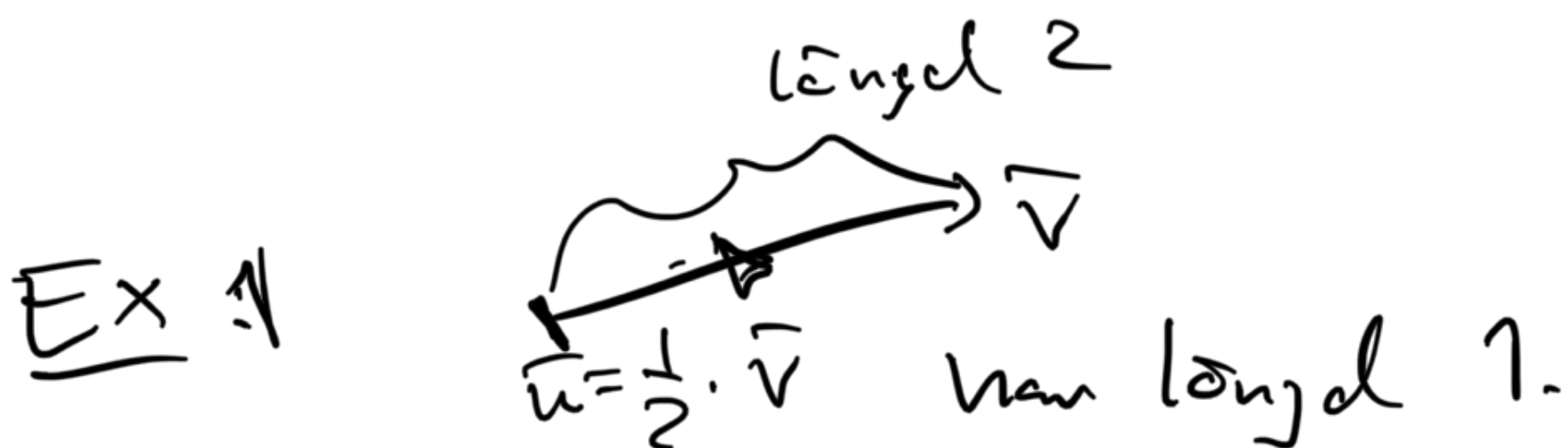
• Vi säger att  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  är en

enhets vektor om  $|\vec{v}| = 1$ .

Anm: Om  $\vec{v} \neq \vec{0}$  så  $\vec{u}$

$$\vec{u} = \left( \frac{1}{|\vec{v}|} \right) \cdot \vec{v} \quad \text{en enhets-vektor.}$$

$\in \mathbb{R}$



$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 0^2}} \cdot (3, 0)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (3, 0) = (1, 0).$$

Standardenhetsvektorer:

För  $\mathbb{R}^2$ :  $\vec{e}_1 = (1, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1)$

För  $\mathbb{R}^3$ :  $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$   
 $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$

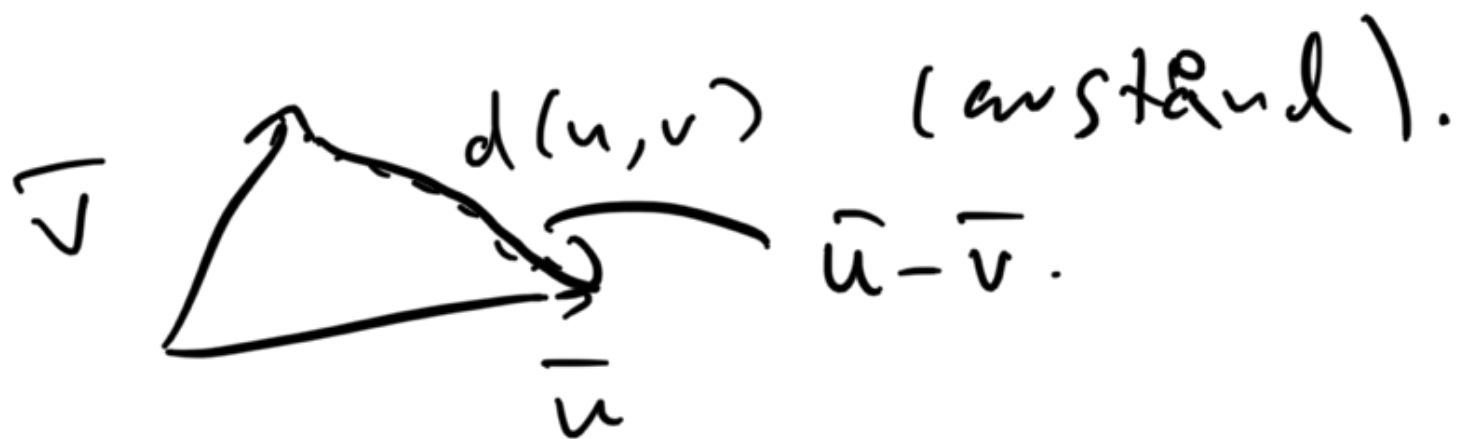
~~För~~  $\mathbb{R}^n$ : tänk!

Ex: Givet  $\bar{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$   
 kan vi skriva  $\bar{v}$  som  
li-j. kombination av  $\bar{e}_1$  &  $\bar{e}_2$ :

$$(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) \\ = x \cdot \bar{e}_1 + y \cdot \bar{e}_2.$$

Avstånd mellan  $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ :

$$d(\bar{u}, \bar{v}) = |\bar{u} - \bar{v}|.$$



Ex:  $\bar{u} = (3, 2)$ ,  $\bar{v} = (1, 1)$

$$\Rightarrow d(\bar{u}, \bar{v}) = |(3, 2) - (1, 1)|$$

$$= |(3-1, 2-1)| = |(2, 1)|$$

$$= \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Se sats 1.2.4 för lite info om  $d(\bar{u}, \bar{v})$ .

Skalarprodukten:

Def: Givet  $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$   
definieras vi skalarprodukten

$\bar{u} \cdot \bar{v}$  som:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

Geometrisk tolkning i  $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ :



$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \cos(\theta) \cdot |\bar{u}| \cdot |\bar{v}|.$$

(\*)

Anm: för  $n \geq 4$  kan vi använda  
... att definiera vinkel!

(\*) för alla  $u, v \in \mathbb{R}^n$

$$\text{Notera: } \bar{u} \cdot \bar{u} = u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_2 + \dots + u_n \cdot u_n \\ = \sum_{i=1}^n u_i^2 = |\bar{u}|^2$$

$$\Rightarrow |\bar{u}| = \sqrt{\bar{u} \cdot \bar{u}}$$

Ö: Se sats 1.2.6 & 1.2.7  
för lite trevliga räkne  
regler. (tex:  $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$ )

Def:  $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$  sägs vara

ortogonala om  $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$ .

(tolkning:  $\bar{u}, \bar{v}$  är "vinkelräta"  
eller ~~är~~ någon av  
dem är  $= \bar{0}$ .)

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \Rightarrow \bar{u} \perp \bar{v}$$

om  $\bar{u} \neq \bar{0}, \bar{v} \neq \bar{0}$ .

Vi säger att  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$

är ortogonala om

$\bar{u}_i, \bar{u}_j \quad (i \neq j)$  är

ortogonala för alla  $i \neq j$ ?

Om dessutom  $|\bar{u}_1| = |\bar{u}_2| = \dots = |\bar{u}_n| = 1$

sågs vektorerna vara

ortonormala.

---

$\bar{u}, \bar{v}$  ortogonala:

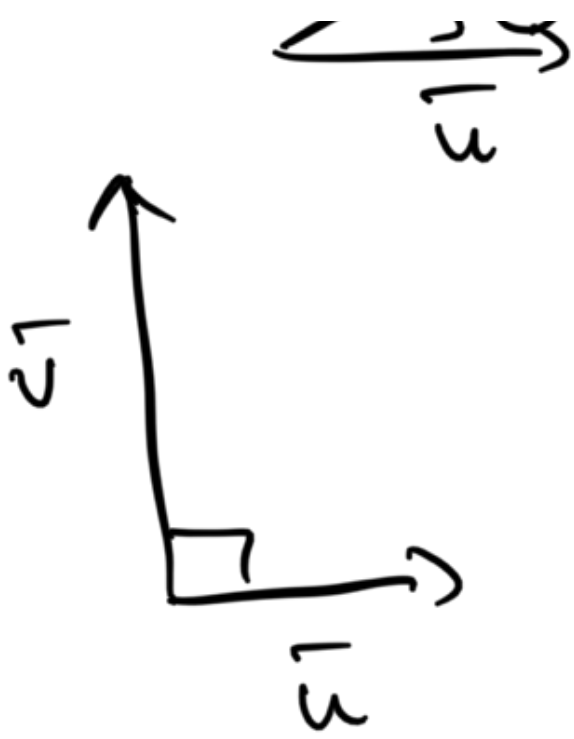
$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$$

Ex:  $(i \mid \mathbb{R}^2)$ :



ej ortogonala  
 $\bar{u} \cdot \bar{v} \neq 0$

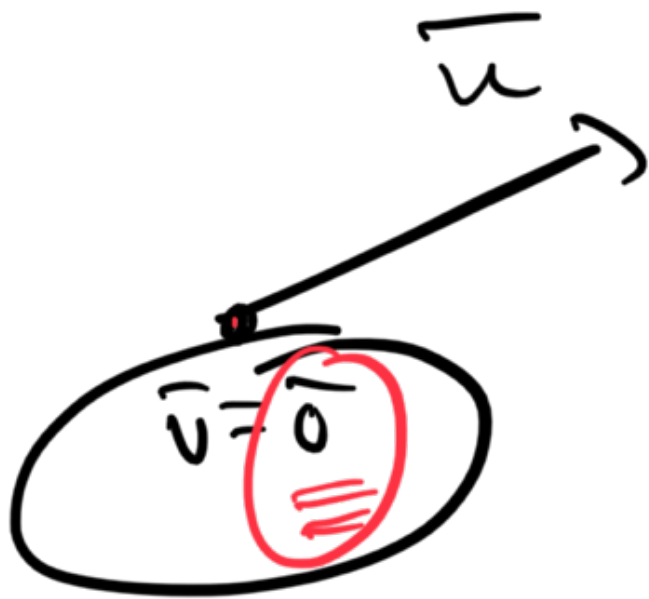
$$0 \neq \pm 90^\circ$$



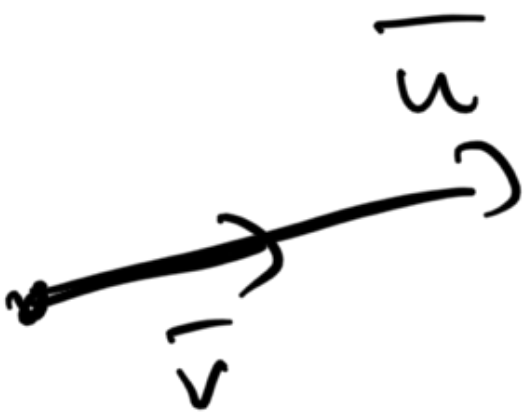
$\bar{u}, \bar{v}$  orthogonal



orthogonal.



$\bar{u}, \bar{v}$  orthogonal



$\bar{u}, \bar{v}$  are orthogonal

---


$$(1, 2) \cdot (0, 0) = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$$