

## \* Baser

En bas  $B = \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$  till ett vektorrum  $V$  innehåller oberoende "byggstenar" till  $V$ . Så

$$\text{i, } V = \text{Span}\{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$$

ii,  $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$  är linjärt oberoende

Dimensionen av  $V$  är då

$$\dim(V) = n \quad (\text{antal basvekt.})$$

Varje  $\bar{x} \in V$  kan då skrivas som

$$\bar{x} = c_1 \bar{b}_1 + c_2 \bar{b}_2 + \dots + c_n \bar{b}_n$$

på ett unikt sätt.

EX Låt delrummet  $V \subseteq \mathbb{R}^3$  vara planet  $x + 2y - z = 0$ . Bestäm en bas  $B$  till  $V$ .

$$x + 2y - z = 0$$

$$\text{Låt } z = t, \quad y = s$$

$$x = t - 2s$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t - 2s \\ s \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

## \* Ortonormala baser

En bas  $B = \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$  sägs vara ortogonal om

$$\bar{b}_i \cdot \bar{b}_j = 0 \quad \text{för } i \neq j$$

(alla basvektorer är ortogonala)

$B$  sägs vara ortonormal om den är ortogonal och

$$|\bar{b}_i| = 1 \quad \forall i \quad \forall = \text{för alla}$$

Kallas ibland för ON-bas

Ex Standardbasen  $S = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$  till  $\mathbb{R}^n$  är en ON-bas, då

$$|\bar{e}_i|^2 = 0^2 + 0^2 + \dots + 1^2 + \dots + 0^2 = 1$$

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0 \quad \text{för } i \neq j$$

## \* Projektion på delrum

Projektionen av  $\vec{v}$  på  $\vec{u}$  ges av

$$\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \vec{u}$$

Om vektorrummet  $V$  har den ortogonala basen  $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$

är projectionen av  $\vec{v}$  på  $V$

$$\begin{aligned} \text{proj}_V(\vec{v}) &= \text{proj}_{\vec{b}_1}(\vec{v}) + \dots + \text{proj}_{\vec{b}_n}(\vec{v}) \\ &= \frac{\vec{v} \cdot \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|^2} \vec{b}_1 + \dots + \frac{\vec{v} \cdot \vec{b}_n}{|\vec{b}_n|^2} \vec{b}_n \end{aligned}$$

Om  $B$  även är ON blir det

$$\text{proj}_V(\vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{b}_1) \vec{b}_1 + \dots + (\vec{v} \cdot \vec{b}_n) \vec{b}_n$$

## \* Gram-Schmidt-ortogonalisering

Låt  $B = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$  vara en bas till ett rum  $V$ . Vi vill skapa en ortogonal bas

$C = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  till samma rum.

$$i, \quad \bar{v}_1 = \bar{u}_1$$

$$ii, \quad \bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \text{proj}_{\bar{v}_1}(\bar{u}_2)$$

$$iii, \quad \bar{v}_3 = \bar{u}_3 - \text{proj}_{\bar{v}_2}(\bar{u}_3) - \text{proj}_{\bar{v}_1}(\bar{u}_3)$$

$\vdots$

$$\bar{v}_n = \bar{u}_n - \text{proj}_{\bar{v}_{n-1}}(\bar{u}_n) - \dots - \text{proj}_{\bar{v}_1}(\bar{u}_n)$$

Om vi även vill ha en ON-bas

$D = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$  till  $V$  kan vi

bara skala om basvektorerna i  $C$ .

$$\bar{w}_i = \frac{1}{|\bar{v}_i|} \bar{v}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Ex Vi har en bas  $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$   
till  $x + 2y - z = 0$ ,  
Hitta en ON-bas till samma plan.

1, GS för att ortogonalisera

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_2 &= \bar{u}_2 - \text{proj}_{\bar{v}_1}(\bar{u}_2) = \bar{u}_2 - \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{u}_2}{|\bar{v}_1|^2} \bar{v}_1 = \\ &= \bar{u}_2 - \frac{-2}{2} \bar{v}_1 = \bar{u}_2 + \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Test: } \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 + 0 + 1 = 0 \text{ ok!}$$

$$\text{Test: } x + 2y - z = 0$$

$$-1 + 2 - 1 = 0 \quad \text{ok!}$$

2, För ON-bas, ~~normalis~~ normera

$$\bar{w}_1 = \frac{1}{|\bar{v}_1|} \bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{w}_2 = \frac{1}{|\bar{v}_2|} \bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|k\bar{v}| = |k| |\bar{v}|$$

$$\text{Svar: } \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

## \* Minsta-kvadratmetoden

Antag att  $A\bar{x} = \bar{b}$  är ett ekvations-system utan lösning ( $\bar{b} \notin \text{col}(A)$ ).

Vektorn  $\bar{v}$  som minimerar

$\|A\bar{v} - \bar{b}\|$  kallas MK-lösningen till systemet. Då är

$$A\bar{v} \neq \bar{b}, \text{ men } A\bar{v} = \text{proj}_{\text{col}(A)}(\bar{b})$$

MK-lösningen ges av

$$A^T A \bar{v} = A^T \bar{b} \quad (\text{normalekvation})$$

Ex Låt  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Försök lösa  $A\bar{x} = \bar{b}$ :

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

Hitta MK-lösning:

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

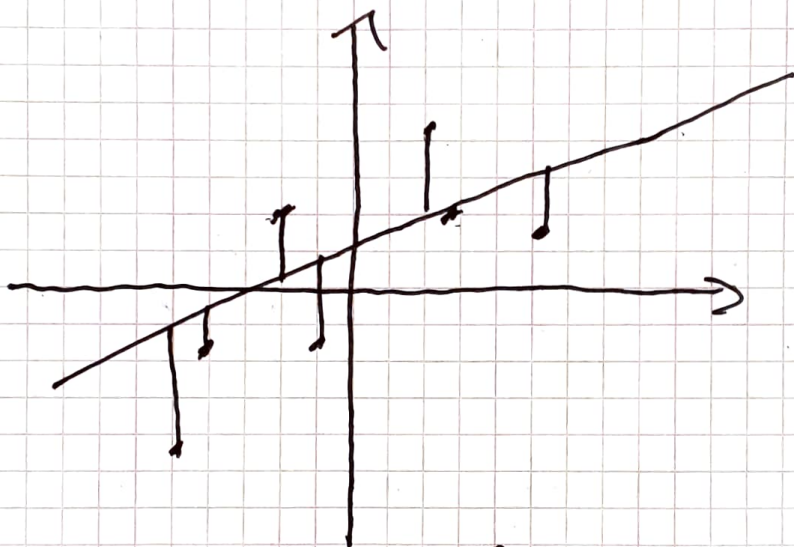
$$A^T \bar{b} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$(A^T A) \bar{v} = (A^T \bar{b})$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 6 & 1 & 9 \\ 1 & 6 & 4 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -35 & -15 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} \end{array} \right]$$

$$\sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{10}{7} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} \end{array} \right] \Rightarrow \bar{v} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ofta används MK-metoden för kurvanpassning



Att anpassa en funktion  $f(x)$  med ändliga parametrar  $c_1, \dots, c_n$  till datapunkter  $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$  är ekvivalent med att försöka lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} f(x_1) = y_1 \\ f(x_2) = y_2 \\ \vdots \\ f(x_m) = y_m \end{cases}$$

Ekvationssystem  
utan lösning för  
parametrarna  
 $c_1, \dots, c_n$

$$\otimes f(x_m, y_m) = z_m$$

Ex 1 Anpassa funktionen  $y = ax^2 + bx$   
(bestäm  $a, b$ ) till punkterna

| x | -1 | 0 | 1 |
|---|----|---|---|
| y | 4  | 1 | 1 |

Ex 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Hitta en ON-bas till  $\text{Null}(A)$

Ex 1

$$\begin{cases} a(-1)^2 + b(-1) = 4 \\ a(0)^2 + b(0) = 1 \\ a(1)^2 + b(1) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - b = 4 \\ 0 = 1 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

$$a - b \neq 4$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi vill lösa  $A^T A \bar{x} = A^T \bar{b}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^T \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -3 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{2}, \quad b = -\frac{3}{2}$$

Ex 2  $\bar{x} \in \text{Null}(A)$  ges av  $A\bar{x} = \vec{0}$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Låt  $y = t$ ,  $z = s$

$$\Rightarrow x = y - 2s = t - 2s$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t - 2s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En bas är då  $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

GS-ortogonalisering:

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_2 &= \bar{u}_2 - \text{proj}_{\bar{v}_1}(\bar{u}_2) = \bar{u}_2 - \frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{u}_2}{|\bar{v}_1|^2} \bar{v}_1 = \\ &= \bar{u}_2 - \frac{-2}{2} \bar{v}_1 = \bar{u}_2 + \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Normera för ON:

$$\bar{w}_1 = \frac{1}{|\bar{v}_1|} \bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{w}_2 = \frac{1}{|\bar{v}_2|} \bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Svar:  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$