

* Kärna

Låt $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ vara en linjär avbildning. Vi har då

$$\text{Null}(A) = \{ \bar{x} \mid A\bar{x} = \vec{0} \}$$

Vi kallar $\text{Ker}(T) = \text{Null}(A)$ för avbildningens kärna.

$\text{Ker}(T) =$ "alla $\bar{x}$ som T avbildar på $\vec{0}$ "

* Bildrum

Låt $T(\bar{x}) = A\bar{x}$, där $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$.
Matrisens kolumnrum är

$$\text{Col}(A) = \text{Span} \{ \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \}$$

Vi kallar

$\text{Im}(T) = \text{Col}(A) = \text{Range}(T)$
för avbildningens bildrum.

$\text{Im}(T) =$ "allt vi kan nå via avbildningen",

$$T(\bar{x}) = A\bar{x} = x_1\bar{a}_1 + \dots + x_n\bar{a}_n \in \text{Im}(T)$$

Notera: Om ~~$T \subseteq \mathbb{R}^n$~~ $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\text{Ker}(T) \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \text{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^m$$

Ex Låt $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara definierad
av

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

a) Hitta standardmatrisen

b) Hitta $\text{Ker}(T)$

c) Hitta $\text{Im}(T)$

$$a) T(\bar{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\bar{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = [T(\bar{e}_1) \ T(\bar{e}_2)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) För $\bar{x} \in \text{Ker}(T)$ är $T(\bar{x}) = A\bar{x} = \bar{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$$

Alltså är $\text{Ker}(T) = \{\bar{0}\}$

c, Vi såg i b, att $\text{rang}(A)=2$.

Alltså är båda kolumnerna i A oberoende. Då blir $\text{Im}(T)$ planet

$$\vec{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ex Låt $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara definierad

av
$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$$

Hitta alla egenvärden och egenvektorer till T .

$$T(\vec{e}_1) = T \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T(\vec{e}_2) = T \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = [T(\vec{e}_1) \ T(\vec{e}_2)] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Nu har vi som vanligt hitta $\lambda, \vec{v}$ till matrisen A . Det karakteristiska polynomet

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-1-\lambda)(-\lambda) - 2 = \end{aligned}$$

$$= \lambda^2 + \lambda - 2$$

Eigenvärdena ges av $p(\lambda) = 0$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

För varje λ_i behöver vi lösa

$$(A - \lambda_i I) \bar{v}_i = \bar{0}$$

$$\lambda_1: A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Låt $x_2 = t$, då blir

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} t/2 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2: A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Låt $x_2 = t$

$$\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Svar: } \begin{cases} \lambda_1 = 1, & \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = -2, & \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

* Intro till baser

En bas B till ett vektorrum V innehåller oberoende "byggstenar" till V , om

$$B = \{ \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k \} \quad \text{så är}$$

$$V = \text{Span} \{ \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k \}$$

Alltså, basvektorer är

i), Linjärt oberoende

ii), Spänner upp rummet de är en bas till.

Det gäller då att

$$\dim(V) = k \quad (\text{antalet basvekt.})$$

Ex

$$\bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \bar{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

kallas för standardbasen till $\mathbb{R}^n$.

Ex

$$\text{Låt } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

a, Hitta en bas B_1 till $\text{Col}(A)$

b, Hitta en bas B_2 till $\text{Null}(A)$

$$a) \text{Col}(A) = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}$$

Alla tre vektorer är parallella, alltså kan vi välja en som oberoende.

$$\Rightarrow B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

b, $\text{Null}(A)$ lös av $A\bar{x} = \bar{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & -6 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Låt $x_2 = t$, $x_3 = s$

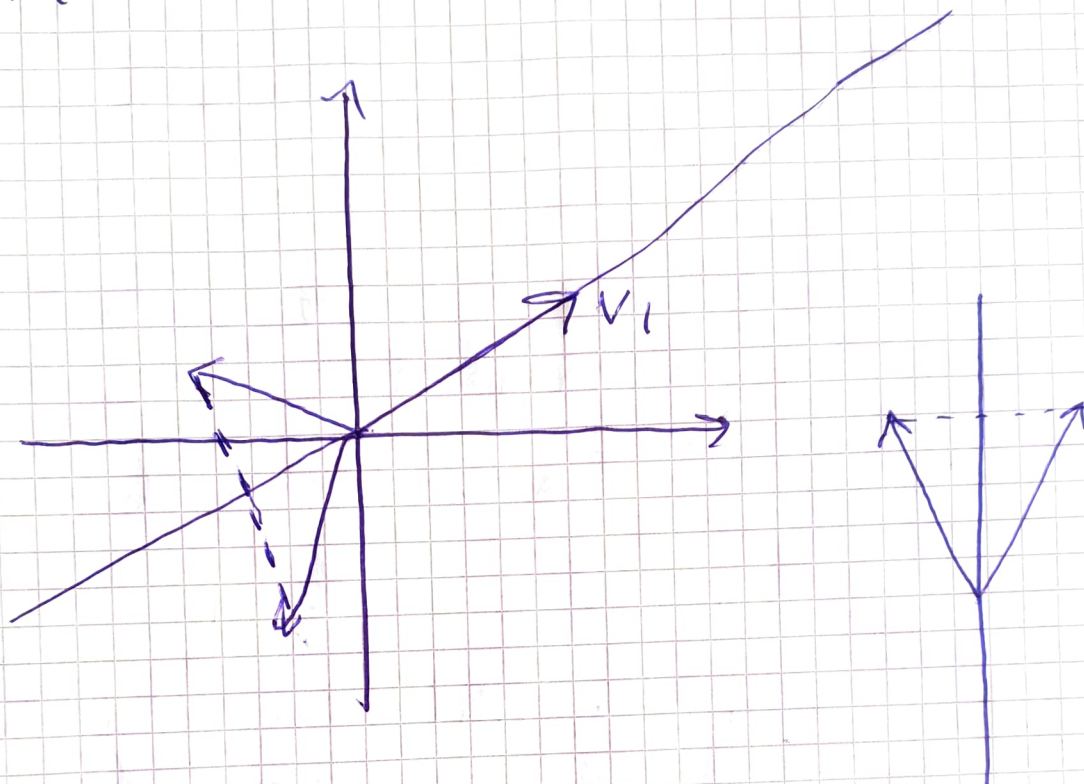
$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t - 2s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

↓ allmänhet är

$$\dim(\text{Null}(A)) + \dim(\text{Col}(A)) = n$$

om A är $m \times n$ -matris.



$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_2$$

$$x_1 - x_2 + 0x_3 = 0$$

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Ex 1 Hitta standardmatrisen för
- $R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ som roterar en vinkel $\frac{\pi}{2}$ runt y-axeln
 - Hitta $\text{Ker}(R)$. Förklara.

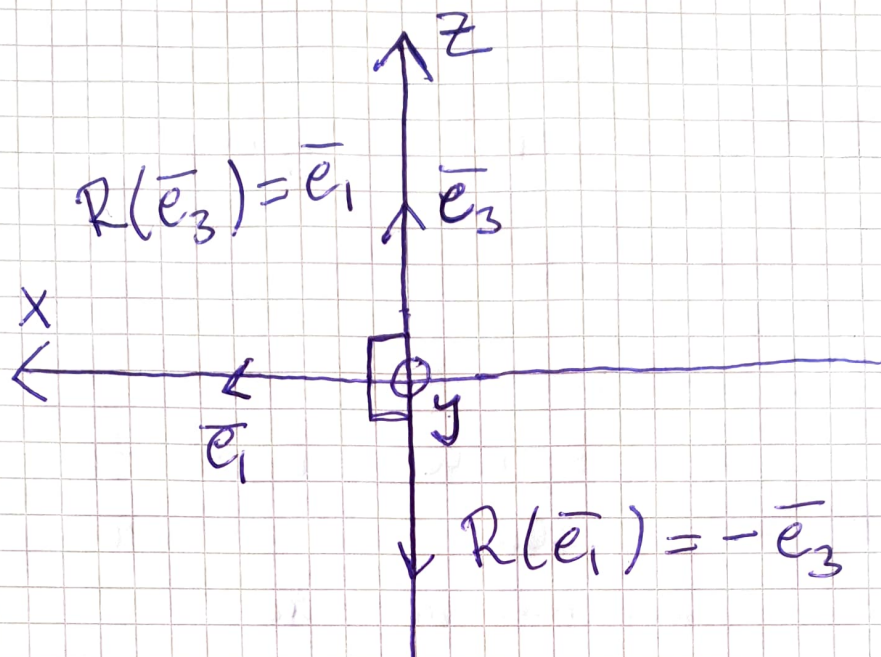
Ex 2 Antag att λ_A är ett egenvärde till en matris A .

- Hitta ett egenvärde till

$$B = kA, \text{ där } k \in \mathbb{R}$$

- Låt $\lambda_A = 0$. Förklara varför motsvarande egenvektor ligger i $\text{Null}(A)$.

Ex 1 a) $R(\bar{e}_2) = \bar{e}_2$, den roterar runt sin egen axel



x, y, z -axlar måste bilda ett högerhandssystem

$$A = [R(\bar{e}_1) \ R(\bar{e}_2) \ R(\bar{e}_3)] =$$
$$= [-\bar{e}_3 \ \bar{e}_2 \ \bar{e}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Vi ser att $\text{rang}(A) = 3$. Då har $A\bar{x} = \bar{0}$ bara triviala lösningen

$$\Rightarrow \text{Ker}(R) = \{\bar{0}\}$$

En rotation påverkar inte vektors längd. Bara $\bar{0}$ kan roteras till $\bar{0}$.

Ex 2 A och λ_A uppfyller

a) $A\bar{v} = \lambda_A \bar{v}$, för egenvektor $\bar{v}$.

Då blir

$$B\bar{v} = kA\bar{v} = \underbrace{k\lambda_A}_{\lambda_B} \bar{v} = \lambda_B \bar{v}$$

$$\Rightarrow \lambda_B = k\lambda_A$$

Om vi skalar om en matris med k så skapas alla egenvärden om med samma konstant.

b, $\lambda_A = 0$, då blir

$$A\bar{v} = \lambda_A \bar{v} = \bar{0}$$

Alla vektorer $\bar{x} \in \text{Null}(A)$ uppfyller

$$A\bar{x} = \bar{0}$$

Alltså är $\bar{v} \in \text{Null}(A)$