

* Linjära avbildningar

En linjär avbildning är en funktion $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sådan att

$$\text{i), } T(k\bar{x}) = kT(\bar{x}) \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\text{ii), } T(\bar{x} + \bar{y}) = T(\bar{x}) + T(\bar{y}) \quad \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$$

Jämför med funktioner $f(x)$,
där $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Varje matris A ($m \times n$) definierar
en linjär avbildning genom

$$T(\bar{x}) = A\bar{x}$$

Vi kan också alltid hitta en
matris till varje linjär avbildning

$$\text{Låt } \bar{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \bar{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n$$

$$T(\bar{x}) = T(x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n) = \{T \text{ linjär}\}$$

$$= x_1 T(\bar{e}_1) + \dots + x_n T(\bar{e}_n) =$$

$$= \underbrace{[T(\bar{e}_1) \dots T(\bar{e}_n)]}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A\bar{x}$$

Äktsa:

i) Hitta $T(\bar{e}_i)$, $i=1, \dots, n$

ii) Stoppa dessa som kolumner
i matrisen.

A kallas för avbildningens
standardmatris

EX

Låt $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definieras

$$\text{av } T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Hitta standardmatrisen till T

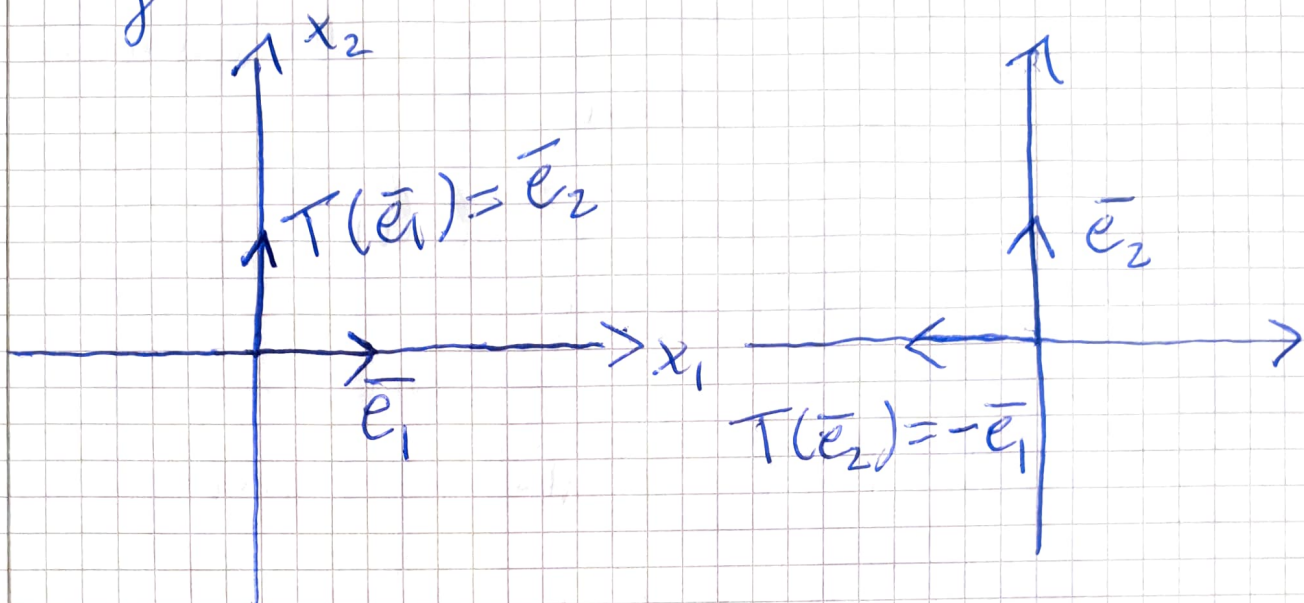
$$T(\bar{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(\bar{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = [T(\bar{e}_1) \ T(\bar{e}_2)] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Test: } A\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Ex Låt $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara avbildningen som roterar vektorer $\frac{\pi}{2}$ runt origo moturs. Hitta s.m till T .

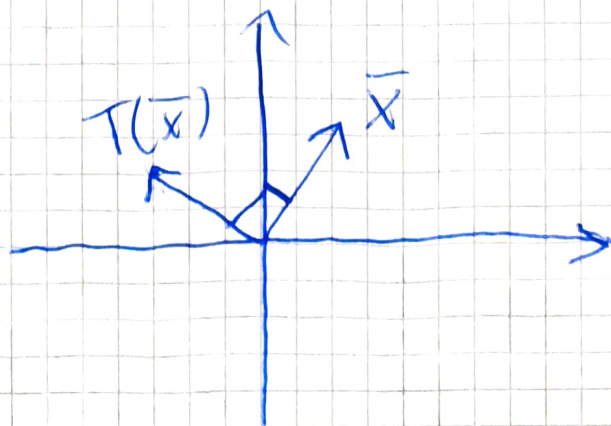


$$A = [T(\vec{e}_1) \ T(\vec{e}_2)] = [\vec{e}_2 \ -\vec{e}_1] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Test: Låt $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$T(\vec{x}) = A\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$



* Inverterbara avbildningar

En avbildning $T(\bar{x}) = A\bar{x}$ är inverterbar om A är inverterbar. Då är

$$T^{-1}(\bar{x}) = A^{-1}\bar{x}$$

$$T^{-1}(T(\bar{x})) = T^{-1}(A\bar{x}) = A^{-1}A\bar{x} = I\bar{x} = \bar{x}$$

* Sammansatta avbildningar

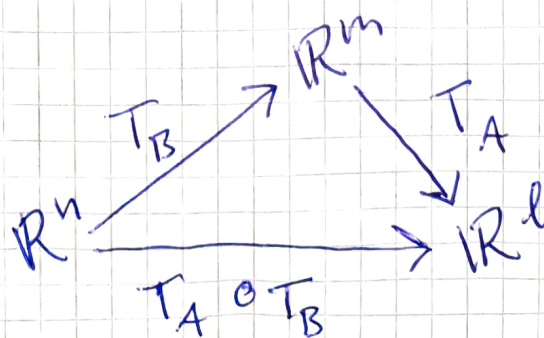
Låt $T_A(\bar{x}) = A\bar{x}$ och $T_B(\bar{x}) = B\bar{x}$ vara två linjära avbildningar. Då är sammansättningen

$$(T_A \circ T_B)(\bar{x}) = T_A(T_B(\bar{x})) = AB\bar{x}$$

OBS: Storlekarna på A och B måste stämma, t.ex. om

$$T_B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad T_A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$$

så är B $m \times n$, A $l \times m$ och AB $l \times n$

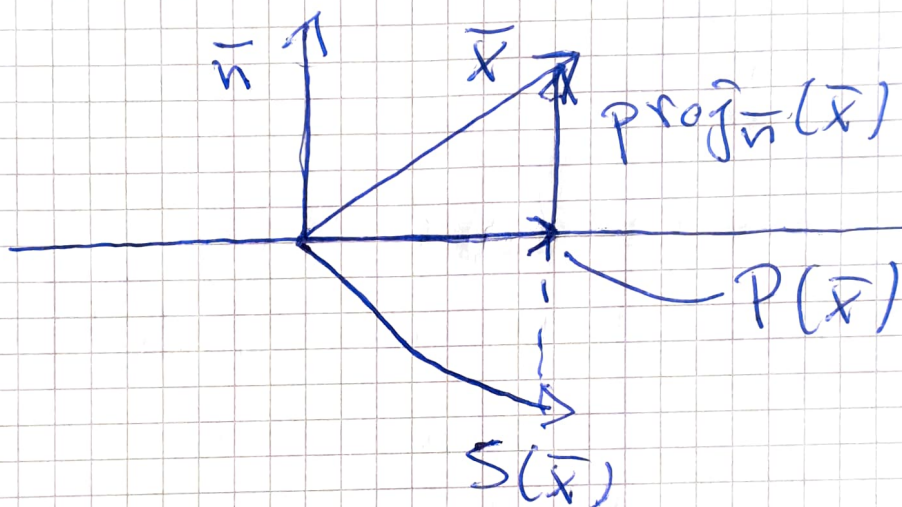


- Speglingen i ett plan med normalvektor $\vec{n}$ ges av

$$S(\vec{x}) = \vec{x} - 2 \operatorname{proj}_{\vec{n}}(\vec{x})$$

- Projektionen i samma plan

$$P(\vec{x}) = \vec{x} - \operatorname{proj}_{\vec{n}}(\vec{x})$$



* Eigenvärden och egenvektorer

Låt A vara en $n \times n$ -matris.
Vi kallar $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ($\vec{v} \neq \vec{0}$) en
egenvektor till A med egenvärde
 $\lambda \in \mathbb{R}$ om

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

Givet A , hur hittar $\vec{v}, \lambda$?

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} = \lambda I\vec{v}$$

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

För att hitta lösning $\vec{v} \neq \vec{0}$
 $\det(A - \lambda I) = 0$

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ kallas för
det karakteristiska polynomet
till matrisen A . Dess rötter
ger egenvärden till A .

Ex Hitta egenvärden och egenvektorer
till $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

i, Hitta $p(\lambda)$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \end{aligned}$$

ii, Lös $p(\lambda) = 0$

$$(1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

iii, Lös $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ för alla λ

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Låt $x_1 = t$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Skall alltid bli fri variabel här!

Svar: $\lambda = 1, \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Test: $A\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{v} = \lambda \vec{v}$

Ex1 a, Låt $S(\bar{x})$ vara speglingen
i planet $x+y+z=0$.
Bestäm standardmatrisen
till $S(\bar{x})$.

b, Hitta inversen till den
matrisen. Tips: Tänk geometriskt

c, Hitta egenvärden till matrisen
Tips: Som i b,

Ex2 Låt λ vara ett egenvärde
till en inverterbar matris A .
Visa att $\frac{1}{\lambda}$ är ett egenvärde
till A^{-1} .

Ex1 Planet $x-y+z=0$

a,
$$S(\bar{x}) = \bar{x} - 2 \operatorname{proj}_{\bar{n}}(\bar{x}) = \bar{x} - 2 \frac{\bar{x} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|^2} \bar{n}$$

där
$$\bar{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$S(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 - 2 \frac{\bar{e}_1 \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|^2} \bar{n} = \bar{e}_1 - \frac{2}{3} \bar{n} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$S(\bar{e}_2) = \bar{e}_2 - 2 \frac{\bar{e}_2 \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|^2} \bar{n} = \bar{e}_2 + \frac{2}{3} \bar{n} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$S(\bar{e}_3) = \bar{e}_3 - 2 \frac{\bar{e}_3 \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|^2} \bar{n} = \bar{e}_3 - \frac{2}{3} \bar{n} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

standardmatrisen blir

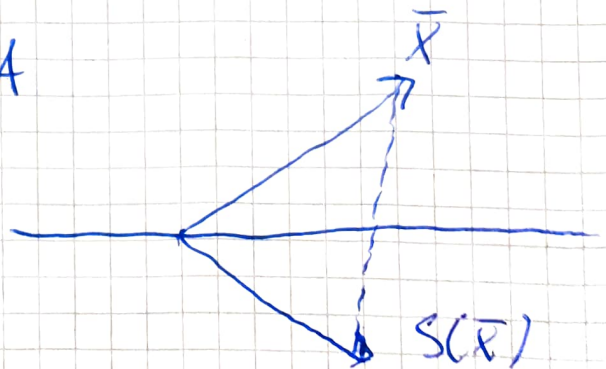
$$A = [S(\bar{e}_1) \ S(\bar{e}_2) \ S(\bar{e}_3)] =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Om vi speglar två gånger får vi tillbaka det vi började med

$$S^{-1} = S, \quad A^{-1} = A$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



c) För $\bar{x} \in$ planet är $S(\bar{x}) = \bar{x}$
 $\Rightarrow \lambda = 1$

För $\bar{x} \perp$ planet är $S(\bar{x}) = -\bar{x}$
 $\Rightarrow \lambda = -1$

Ex 2

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}$$

$$A^{-1}A\bar{v} = A^{-1}\lambda\bar{v}$$

$$I\bar{v} = \lambda A^{-1}\bar{v}$$

$$\bar{v} = \lambda A^{-1}\bar{v}$$

$$\underbrace{A^{-1}\bar{v}}_{\bar{v}} = \frac{1}{\lambda}\bar{v}$$

$\Rightarrow \frac{1}{\lambda}$ är ett egenvärde till A^{-1} ,
med samma egenvektor $\bar{v}$.

(OBS: $\lambda \neq 0$ för inverterbar
matris)