

Låt  $A$  vara en  $m \times n$ -matris,  
och  $A(i, j)$  vara matrisen som  
fås genom att ta bort rad  $i$   
och kolumn  $j$  från  $A$ .

Ex  $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, A(1, 2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

### \* Determinanter

Låt  $A$  vara en  $n \times n$ -matris.  
Determinanten av  $A$  skrivs som  
 $\det(A)$ , där  $\det(A) \in \mathbb{R}$ .

$2 \times 2$ :  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} =$   
 $= ad - bc$

För större matriser: kofaktorexpansion.

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A(i, j))$$

Om  $A$  har element  $a_{ij}$

i, "Går längs rad  $i$ "

$$\det(A) = a_{i1} C_{i1} + \dots + a_{in} C_{in}$$

ii, "Går längs kolumn  $j$ "

$$\det(A) = a_{1j} C_{1j} + \dots + a_{nj} C_{nj}$$



Ex

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ beräkna } \det(A).$$

Tips: Välj en rad eller kolumn med så många nollor som möjligt.

rad 1:

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0(-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (1 \cdot 1 - 1 \cdot 2) - (2 \cdot 2 - 1 \cdot 0) = -1 - 4 = -5$$

Kolumn 1:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot (-1)^2 \det(A(1,1)) + 2(-1)^3 \det(A(2,1)) + 0(-1)^4 \det(A(3,1)) = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 - 2) - 2(0 + 2) = \\ &= -1 - 4 = -5 \end{aligned}$$

Minnesregel

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$



## \* Radoperationer

- Om B fås genom att byta plats på två rader i A så är  $\det(B) = -\det(A)$
- Om B fås genom att mult. en rad i A med  $k \in \mathbb{R}$  så är  $\det(B) = k \det(A)$
- Om B fås genom att addera en multipel av en rad till en annan så är  $\det(B) = \det(A)$

Ex Låt  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , beräkna  $\det(A)$ .

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \stackrel{\frac{1}{2} R_1}{=} \\ &\stackrel{2}{\downarrow} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2 - 3R_1 \\ R_3 - R_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{R_3 - \frac{1}{2}R_2}{=} \\ &= 0 \quad (\text{gå längs rad 3}) \end{aligned}$$

$\det(A) = 0$  om kolumnerna i A är linjärt beroende.

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$  inverterbar, o.s.v



## \* Kryssprodukt

Givet  $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

kan vi skapa kryssprodukten

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - w_2 v_3 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}$$

Låt  $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (v_2 w_3 - v_3 w_2) \vec{e}_1 + (v_3 w_1 - v_1 w_3) \vec{e}_2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \vec{e}_3$$

Egenskaper:

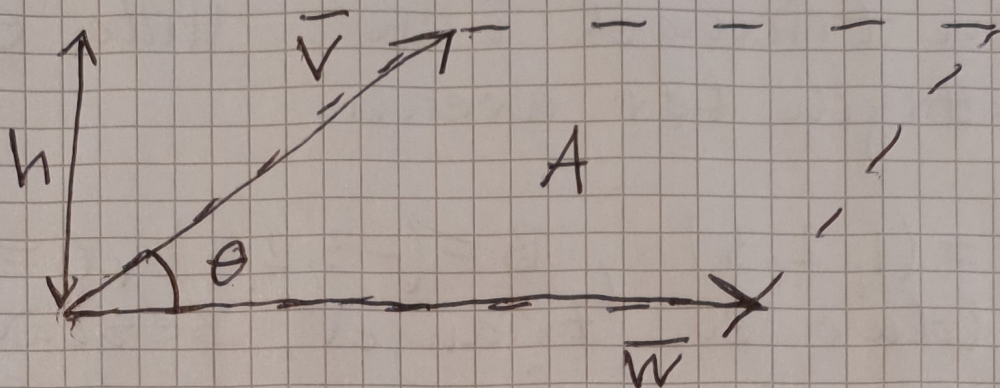
\*  $(\vec{v} \times \vec{w}) \perp \vec{v}$  och  $(\vec{v} \times \vec{w}) \perp \vec{w}$

\*  $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$

\*  $|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| |\vec{w}| \sin \theta$

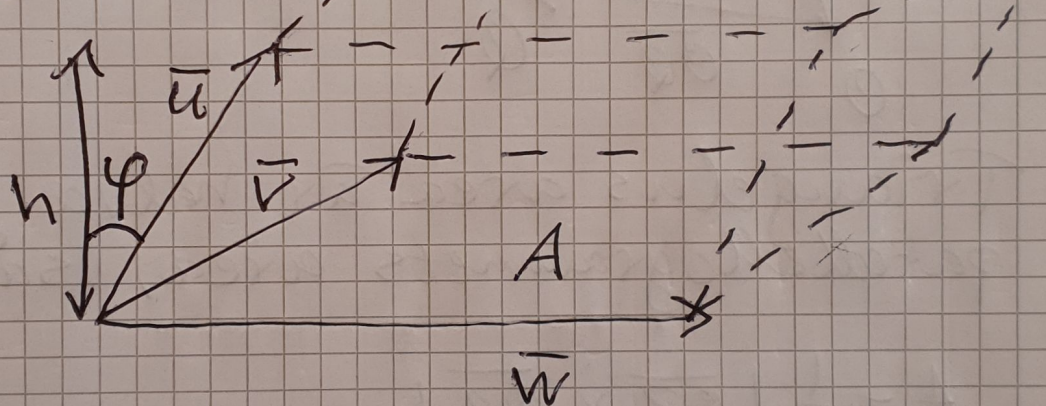


## \* Area av ett parallelogram



$$A = bh = \underbrace{|\vec{w}|}_b \underbrace{|\vec{v}| \sin \theta}_h = |\vec{w} \times \vec{v}|$$

## \* Volymen av en parallelepiped



$$V = hA = h |\vec{w} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cos(\varphi) |\vec{w} \times \vec{v}| =$$

$$= |\vec{u}| |\vec{w} \times \vec{v}| \cos(\varphi) \stackrel{A}{=} h$$

$$= \vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v})$$

( $\varphi$  är vinkeln  
mellan  ~~$\vec{u}$  och  $\vec{w} \times \vec{v}$~~   
 $\vec{u}$  och  $\vec{v} \times \vec{w}$ )

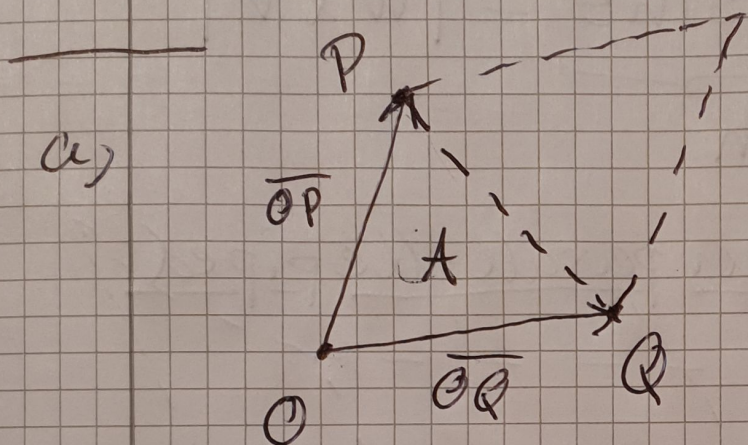
$$V = |\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v})|$$

Kallas för trippelprodukt



Ex  
a)  $P, Q$ , och  $O$  (origo) bildar en triangel i  $\mathbb{R}^3$ . Hitta ett uttryck för arean

b)  $A = (1, 2, 3)$ ,  $B = (-3, 2, 1)$ ,  $C = (-1, -1, 2)$  bildar en triangel. Bestäm dess area via svaret från a).



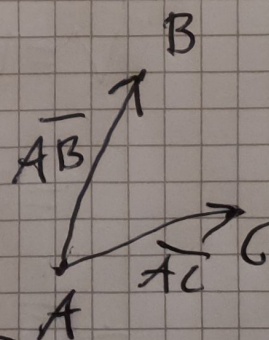
Triangelns area är halva parallelogrammets area, så

$$A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}|$$

b)

$$\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$



$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Arean} &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + (-12)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{180} \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$