

* Linjärkombinationer

Låt $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ och $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$,
vi kallar då

$$c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_n \vec{v}_n$$

en linjärkombination av vektorerna
 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ med koefficienter/vikten
 $c_1, \dots, c_n$. Spannet av vektorerna

$$\text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} = \{\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n\}$$

Ex Linjen

$$\vec{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

kan skrivas som

$$\text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

(Måste gå genom)
origo

* Linjärt (o)beroende

Vi kallar $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ linjärt
oberoende om

$$c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_n \vec{v}_n = \vec{0} \Leftrightarrow c_1 = \dots = c_n = 0$$

(Ingen av vektorerna är
en l.k. av de andra).

Annars är de linjärt beroende.

Ex Är vektorerna $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$,
 $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ linjärt oberoende?

Matrisen med $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ som
kolumner (eller rader) har
rang = antalet oberoende vektorer.

$$[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 2 \\ 0 & \textcircled{3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↓ ↓

Rang = 2 $\Rightarrow$ 2 oberoende
Alltså är $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ beroende

$$\text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \text{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$$

Ex

* Delrum

Ett delrum V till $\mathbb{R}^n$ är en delmängd $V \subseteq \mathbb{R}^n$ som för $\bar{x}, \bar{y} \in V$ och $k \in \mathbb{R}$ uppfyller

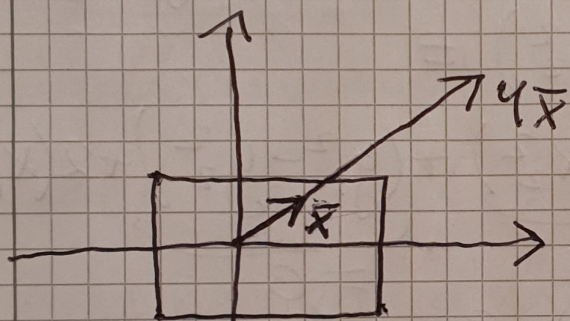
i, $\bar{x} + \bar{y} \in V$ (slutet under addition)

ii, $k\bar{x} \in V$ (slutet under multiplikation)

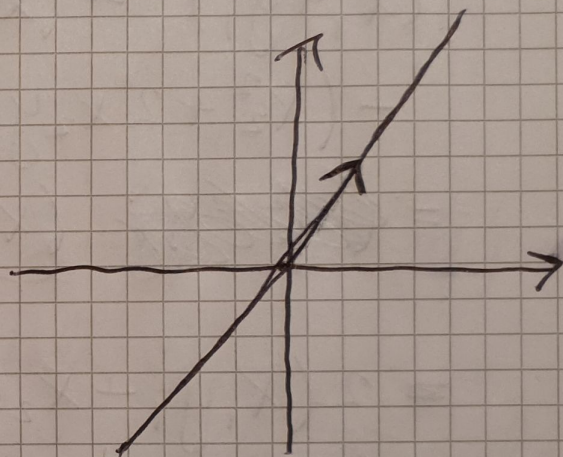
(ii, $\Rightarrow$) $\vec{0}$ finns i alla delrum

Ex Alla $\text{Span}\{ \dots \}$ är delrum

Ex



(Inte delrum)



(Delrum)

Ex Låt $U \subseteq \mathbb{R}^2$ vara rummet definierat av att för $\bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in U$ gäller att $v_1^2 + v_2^2 = 0$.
Är U ett delrum?

Antag $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ och $\bar{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in U$
 $\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0$, $y_1^2 - y_2^2 = 0$

$$i), \quad k\bar{x} = \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{bmatrix}$$

$$(kx_1)^2 - (kx_2)^2 = k^2 \underbrace{(x_1^2 - x_2^2)}_{=0} = 0$$

Alltså är $i)$, ok för U

$$ii), \quad \bar{x} + \bar{y} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}$$

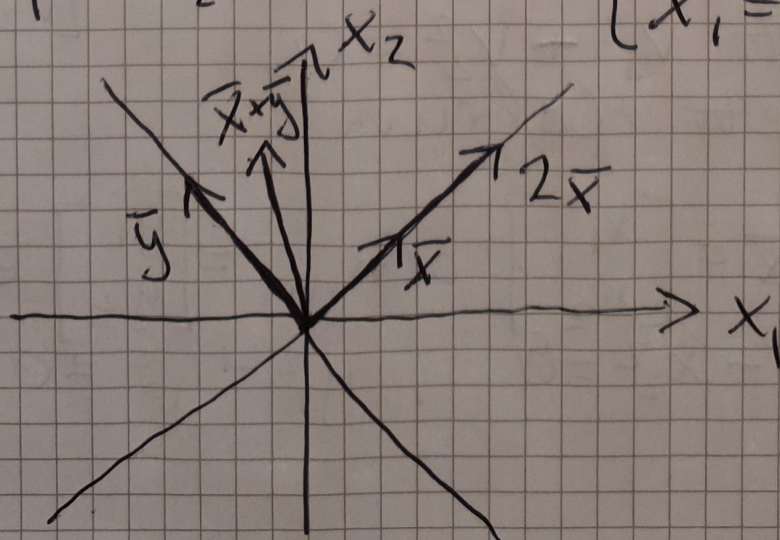
$$(x_1 + y_1)^2 - (x_2 + y_2)^2 = x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 - (x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2) =$$

$$= \underbrace{(x_1^2 - x_2^2)}_{=0} + \underbrace{(y_1^2 - y_2^2)}_{=0} + 2(x_1y_1 - x_2y_2)$$

$$= 2(x_1y_1 - x_2y_2) \neq 0$$

Alltså är $ii)$, inte ok för U ,
och U är inte ett delrum.

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$$



* Kolumnrum

Låt A vara en $m \times n$ -matris med kolumnvektorer $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$. Kolumnrummet till A är då

$$\text{Col}(A) = \text{Span}\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\}$$

och är då ett delrum till $\mathbb{R}^m$. För att $A\bar{x} = \bar{b}$ ska vara lösbart måste $\bar{b} \in \text{Col}(A)$

* Nollrum

Nollrummet till A är

$$N(A) = \text{Null}(A) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\bar{x} = \bar{0}\}$$

och är ett delrum till $\mathbb{R}^n$.

"Alla vektorer $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, som när de multipliceras med A blir $\bar{0}$."

Ex

Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Hitta $\text{Col}(A)$ och $\text{Null}(A)$.

För $\text{Col}(A)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alltså är bara de första två
kolumnerna oberoende.

$$\text{Col}(A) = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},$$

vilket är planet

$$\bar{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

För $\text{Null}(A)$: Lös $A\bar{x} = \bar{0}$!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Låt $x_3 = t$ vara fri variabel

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 = 2t \\ x_2 = -x_3 = -t \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

För en $n \times n$ -matris:

$$\dim(\text{Col}(A)) + \dim(\text{Null}(A)) = n$$

Ex1

$$\text{Låt } \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \bar{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a, Är $\text{Span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ ett plan, en linje, eller hela $\mathbb{R}^3$?

b, Låt $A = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3]$. För vilka $\bar{b} \in \mathbb{R}^3$ har systemet $Ax = \bar{b}$ minst en lösning?

Ex2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a, Hitta $\text{Null}(A)$

b, Hitta $\text{Null}(BA)$

c, Förklara svaret i b)

Ex1

$$a, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rang} = 2 \Rightarrow 2$ oberoende $\Rightarrow$ plan

$$b, \text{ Låt } \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \text{ Då är}$$

$$A\bar{x} = x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3$$

$$\Rightarrow x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 + x_3\bar{v}_3 = \bar{b}$$

Går att lösa om

$$\bar{b} \in \text{Span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} = \text{Span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\},$$

d.v.s $\bar{b}$ ligger i planet från a.
Alltså går det att lösa för

$$\bar{b} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ex2

a, Hitta $\text{Null}(A)$ genom $A\bar{x} = \bar{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Låt $x_2 = t$, då blir $x_1 = -t$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b) \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

För att hitta $\text{Null}(BA)$, lös $BA\bar{x} = \bar{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 7 & 7 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \bar{x} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Vi har $\text{rang}(B) = 2$, alltså är B är inverterbar. Då har $B\bar{x} = \bar{0}$ bara triviala lösning. $\bar{x} = \bar{0}$. Då ser vi

$$BA\bar{x} = \bar{0}$$

$$B(A\bar{x}) = \bar{0}$$

Detta har ju då bara lösningen

$A\bar{x} = \bar{0}$,
vilket ger samma nollrum.