

* Matriser

- Addition

Vi adderar matriser elementvis

$$\underline{\text{Ex}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(Måste ha samma storlek)

- Multiplikation med skalar $k \in \mathbb{R}$

Vi multiplicerar varje element med k

$$\underline{\text{Ex}} \quad k \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 2k \\ 0 & -k \end{bmatrix}$$

- Multiplikation med vektor

Låt A vara en $m \times n$ -matris

och $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Då är

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \dots + a_{mn}v_n \end{bmatrix}$$

$(m \times \underline{n}) \quad (\underline{n} \times 1) \quad (m \times 1)$

OBS: A är $m \times n$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $(A\vec{v}) \in \mathbb{R}^m$

- Multiplikation med matris
Låt B vara en $n \times l$ -matris
med kolumner $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_l$. Då är

$$AB = A[\bar{b}_1 \dots \bar{b}_l] = [A\bar{b}_1 \dots A\bar{b}_l]$$

$(m \times n) \quad (n \times l) \quad \quad \quad (m \times l)$

Ex

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Tänk på att

- $AB \neq BA$ i allmänhet
- $AB = AC \not\Rightarrow B = C$
(Kan inte "förkorta" en matris)

Vi använder konventionen att

a - skalär

$\bar{a}$ - vektorer

A - matris

* Linjärkombinationer

Låt $A = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n]$ vara en $m \times n$ -matris

och $\bar{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$, då blir

$$A\bar{c} = [\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c_1 \bar{a}_1 + c_2 \bar{a}_2 + \dots + c_n \bar{a}_n$$

H.L. kallas för en linjär-kombination av vektorerna $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n$ med koefficienter $c_1, \dots, c_n$.

Ex Låt $\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Hitta $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ så att
 $c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2 = \bar{v}_3$

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & | & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$

Om A är en $m \times n$ -matris,

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

så motsvarar $A\bar{x} = \bar{b}$ ekv. systemet
som har totalmatrisen

$$[A | \bar{b}],$$

Ex Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Lös $A\bar{x} = \bar{0}$.

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \quad ([0 \ 0 \ | \ 3])$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Låt $x_2 = t$ vara fri variabel. Då är

$$x_1 = -x_2 = -t, \text{ och lösningen blir}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

OBS: Linjen går genom origo

* Identitetsmatris

Identitetsmatrisen I_n är en $n \times n$ -matris på formen

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Ex är då $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Då gäller att om A är $m \times n$ så är

$$AI_n = I_m A = A$$

* Inversa matriser

Låt A vara en $n \times n$ -matris, Inversen till A skrivs A^{-1} och uppfyller $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

$$(\text{Jämför med } aa^{-1} = a \frac{1}{a} = 1)$$

Inte alla matriser är inverterbara!

$$A \text{ inverterbar} \Leftrightarrow \text{rang}(A) = n$$

Recept för att invertera matris:

$$[A | I] \sim \text{radop.} \sim [I | A^{-1}]$$

Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, with A^{-1} .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 1 \end{array} \right] R_2 - R_1 \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right] \left(-\frac{1}{5} \right) R_2$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Test: $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \text{ oh!}$$

* Givet en $m \times n$ -matris A är
transponatet av A , A^T , en
 $n \times m$ -matris där vi bytt plats
på rader och kolumner

Ex

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Om vi har ett lkr. syst. $A\bar{x} = \bar{b}$
där A är inverterbar, så finns
en unik lösning.

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= \bar{b} \\ A^{-1}A\bar{x} &= A^{-1}\bar{b} \\ I\bar{x} &= A^{-1}\bar{b} \\ \bar{x} &= A^{-1}\bar{b} \end{aligned}$$

(Doch oftast längre att invertera
 A än att lösa som vanligt)

Ex 1

$$\text{Låt } A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lös systemet $A\bar{x} = \bar{b}$ genom att
invertera A . Tips: Beräkna $A^2 = AA$

Ex 2

$$\text{Låt } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ de uppfyller}$$

$$AB\bar{x} = -2\bar{x} \quad (1)$$

a, Skriv (1) på formen
 $C\bar{x} = \bar{0}$, där C är 2×2

b, hitta $\bar{x}$

Ex 1

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = A^{-1}$$

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b} = A\bar{b} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Ex 2

$$a, AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$AB\bar{x} = -2\bar{x}$$

Kan jag skriva ~~$AB\bar{x} + 2\bar{x} = \vec{0}$~~ ?

$$(AB + 2I)\bar{x} = \vec{0} \quad \text{Nej!}$$

$$IAB\bar{x} = -2I\bar{x}$$

$$AB\bar{x} + 2I\bar{x} = \vec{0}$$

$$(AB + 2I)\bar{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow C = AB + 2I = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b, $C\bar{x} = \vec{0}$ motsvarar då systemet

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Måste ha $x_1 = t$ som fri variabel

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$