

* Linjära ekvationssystem

Ett linjärt ekv. syst. är på formen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(Linjärt:
 ~~x_1^2~~ , ~~x_1x_2~~
 ~~$\cos(x_3)$~~)

Om $b_i = 0 \quad \forall i$ är systemet homogent

för alla

En lösning $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ uppfyller alla
ekvationer samtidigt.

Möjliga fall:

Konsistent $\left\{ \begin{array}{l} - \text{En unik lösning, t.ex. } \begin{cases} x = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \\ - \text{Oändligt antal lösningar, t.ex. } \begin{cases} x + y = 4 \end{cases} \end{array} \right.$

- Ingen lösning, t.ex. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$

Ex

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

bestämmer skärningen mellan två
plan i $\mathbb{R}^3$.

* Intro till matriser

Koefficientmatrisen ges av

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{s\u00e4gs ha} \\ \text{storlek } m \times n \end{array}$$

$\uparrow$
kolumn

$\leftarrow$ rader

Totalmatrisen ges av

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right]$$

Ex $\begin{cases} 5x - y = 2 \\ x + 4y = 0 \end{cases}$ har totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

* Trappstegsform

Ex $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 2 & 2 & \\ 0 & 0 & 3 & \end{array} \right]$, $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$

rang = 3 rang = 2

i) En rad med bara nollor är längst ner

ii) Första nollskilda elementet i varje rad är till vänster om alla nollskilda element nedan för

Rangen av en matris = antal steg

i trappan = antal ledande element

Trappstegsformen är reducerad om alla ledande element är 1, och de har nollor ovanför sig

Ex $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Ekv. syst. $\rightarrow$ totalmatris $\rightarrow$ red. trappstegsform $\rightarrow$ lösning

* Radoperationer

i) Byta plats på rader

iii) Multiplitera en rad med en konstant

ii) Addera multiplar av en rad till en annan

OBS: Radoperationer ändrar inte lösningsmängden

Ex Lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-y=1 \end{cases}$$

radekvivalent

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \end{array} \right] R_2 - 3R_1 \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \left(-\frac{1}{7}\right) \times R_2 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Ekvationssystemet är då

$$\begin{cases} x+0y=1 \\ 0x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Tips: Kolla lösningar!

* Olösbara system

Om det uppstår en rad

$0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid k$, där $k \neq 0$
så finns ingen lösning

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = k$$

$$0 = k \quad (\text{motsägelse})$$

* Öändligt antal lösningar

Ex
$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ -x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{array} \right] \left(\frac{1}{2}\right)R_1 \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] R_2 + R_1$$

Ekvationssystemet blir då

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Låt $y = t$ (fri variabel). Det ger

$$x + 2t = 3$$

$$x = 3 - 2t$$

Lösningarna blir då

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Antal fria variabler =

Antal variabler - matrisens rang

Ex

$$L_1: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$L_2: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Avgör om L_1 och L_2 skär varandra

$$\begin{cases} -t = 1 - s \\ 0 = 2 + 2s \\ 2t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -t + s = 1 \\ 2s = 2 \\ 2t = 2 \end{cases}$$

Ex Skriv om planet $2x + 6y - 2z = 0$
på parameterform

$$[2 \ 6 \ -2 \mid 0] \sim [1 \ 3 \ -1 \mid 0]$$

Antal fria variabler $3 - 1 = 2$

Låt $y = t$, $z = s$

$$x + 3t - s = 0$$

$$x = -3t + s$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3t + s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Obs: Ett homogent ekvationssystem
har alltid den triviala
lösningen $\vec{x} = \vec{0}$

Ex För vilka värden på $a \in \mathbb{R}$
har systemet

$$\begin{cases} (a-3)y = 1 \\ 2x - ax + ay - 3y + 2z - az = 1 \\ (4-2a)x + (2a-6)y + (5-2a)z = 3 \end{cases}$$

en unik lösning?

$$\begin{cases} (a-3)y = 1 \\ (2-a)x + (a-3)y + (2-a)z = 1 \\ (4-2a)x + (2a-6)y + (5-2a)z = 3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & a-3 & 0 & 1 \\ 2-a & a-3 & 2-a & 1 \\ 4-2a & 2a-6 & 5-2a & 3 \end{array} \right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2-a & a-3 & 2-a & 1 \\ 0 & a-3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_2 \\ R_1 \\ R_3 - 2R_2 \end{array}$$

Unik lösning $\Rightarrow$ rang 3

$$\begin{aligned} \bullet \quad 2-a &\neq 0 \\ a &\neq 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad a-3 &\neq 0 \\ a &\neq 3 \end{aligned}$$

Svar: Alla a förutom $a=2$
eller $a=3$