

1. 11/10 - 2017

Bestäm en ekvation för det plan P_1 som innehåller

$$A = (3, 5, 5) \text{ och } B = (7, 5, 7)$$

och är ortogonalt mot planet

$$P_2: x + y + z = 7$$

En vektor i P_1 är

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

och P_2 har normal $\vec{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Normalen $\vec{n}_1$ till P_1 ska vara ortogonal mot $\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{AB}$ ligger i P_1)

och mot $\vec{n}_2$ ($P_1 \perp P_2$). Då är

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_2 \times \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Planets ekvation blir då

$$2x - y - z = k$$

Insättning av A ger

$$k = 2 \cdot 3 - 5 - 5 = -4$$

$$\text{Svar: } 2x - y - z = -4$$

3. 8/6 - 2017

L_1 är linjen $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

och L_2 är linjen som går genom $P = (-1, -1, 2)$ och

$Q = (1, b, 1)$, där $b \in \mathbb{R}$

a, Bestäm alla värden på b så att L_1 skär L_2 .

b, För $b=1$, bestäm en ekvation för planet som innehåller L_1 och L_2 .

a) L_2 har riktningsvektor

$$\vec{d}_2 = \vec{PQ} = \begin{bmatrix} 2 \\ b+1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

på parameterform är L_2

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ b+1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

För skärning mellan L_1 och L_2

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ b+1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} t+2s \\ -t+(b+1)s \\ t-s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} t+2s=2 \\ -t+(b+1)s=2 \\ t-s=-1 \end{cases}$$

Ekvationssystem för t, s . Om lösning finns så skär L_1, L_2 .

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ -1 & b+1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & b+3 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & b+3 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-b \end{array} \right]$$

Är konsistent (lösbar) om

$$1-b=0$$

$$b=1$$

Svar: $b=1$

b, Ett plan som innehåller L_1 och L_2 har en normal $\bar{n}$ som är ortogonal mot L_1 och L_2

$$\bar{n} = \bar{d}_1 \times \bar{d}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Planets equation

$$x - 3y - 4z = k$$

Kan t.ex sätta in P

$$k = -1 - 3(-1) - 4 \cdot 2 = -6$$

$$\text{Svar: } x - 3y - 4z = -6$$

5. 13/3 - 2017

Delrummet $V \subset \mathbb{R}^3$ ges av
 $x - 2y + z = 0$. Låt $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
vara den linjära avbildningen

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y + 3z \\ 2x - 4y + 6z \\ 3x - 6y + 9z \end{bmatrix}$$

a, Hitta en bas $B = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ till
 $\mathbb{R}^3$, så att $V = \text{span}\{\bar{u}, \bar{v}\}$.

b, Visa att $T(\bar{x}) \in V$ för alla $\bar{x} \in V$

c, Bestäm $[T]_B$

a, Kan hitta 2 vektorer som
spänner upp V .

$$x - 2y + z = 0$$

$$\text{Låt } y = t, \quad z = s$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t - s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{u} \qquad \qquad \bar{v}$

Tre oberoende vektorer $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$ bildar alltid en bas till $\mathbb{R}^3$, så behöver $\bar{w}$ som är oberoende med $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

Vilken vektor som helst utanför planet V funkar, t.ex

$$\bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Svar: } B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

b, Alla $\bar{x} \in V$ kan skrivas som

$$\bar{x} = c_1 \bar{u} + c_2 \bar{v}$$

Eftersom T är linjär är då

$$T(\bar{x}) = T(c_1 \bar{u} + c_2 \bar{v}) = c_1 T(\bar{u}) + c_2 T(\bar{v})$$

Räcker att kolla $T(\bar{u}) \in V$ och $T(\bar{v}) \in V$.

$$T(\bar{u}) = T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2-2 \\ 4-4 \\ 6-6 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$x - 2y - z = 0 - 2 \cdot 0 - 0 = 0 \quad \text{ok!}$$

$$T(\bar{v}) = T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1+3 \\ -2+6 \\ -3+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x - 2y + z = 2 - 8 + 6 = 0 \quad \text{ok!}$$

Alltså ligger $T(\bar{x}) \in V$ för alla $\bar{x} \in V$.

$$c) [T]_B = \left[[T(\bar{u})]_B \quad [T(\bar{v})]_B \quad [T(\bar{w})]_B \right]$$

✓ allmänhet är $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\bar{x} = c_1 \bar{u} + c_2 \bar{v} + c_3 \bar{w}, \quad \text{och}$$

$$[\bar{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Kan lösa för c_1, c_2, c_3 !

$$T(\bar{u}) = \bar{0} \Rightarrow [T(\bar{u})]_B = \bar{0}$$

$$T(\bar{v}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = c_1 \bar{u} + c_2 \bar{v} + c_3 \bar{w}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow [T(\bar{v})]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(\bar{w}) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = c_4 \bar{u} + c_5 \bar{v} + c_6 \bar{w}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow [T(\bar{w})]_B = \begin{bmatrix} c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nu här då

$$\text{Svar: } [T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5b. 21/10 - 2016

Vi har en reflektion

$$R(\vec{x}) = \vec{x} - 2(\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n} \quad (|\vec{n}| = 1)$$

och vi vill visa att dess matris
är ortogonal, d.v.s $A^T = A^{-1}$,

$$\text{där } R(\vec{x}) = A\vec{x}.$$

En ortogonal avbildning bevarar
längder och vinklar, d.v.s
bevarar skalärprodukten.

Kann visa det. Låt P vara ortogonal

$$\begin{aligned} (P\vec{x}) \cdot (P\vec{y}) &= (P\vec{x})^T (P\vec{y}) = \\ &= \vec{x}^T \underbrace{P^T P}_{=I} \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y} \end{aligned}$$

Vi är klara om vi kan visa
samma sak för R , d.v.s att

$$R(\vec{x}) \cdot R(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

$$\begin{aligned} R(\vec{x}) \cdot R(\vec{y}) &= (\vec{x} - 2(\vec{x} \cdot \vec{n})\vec{n}) \cdot (\vec{y} - 2(\vec{y} \cdot \vec{n})\vec{n}) = \\ &= \vec{x} \cdot \vec{y} - 2(\vec{y} \cdot \vec{n})(\vec{x} \cdot \vec{n}) - 2(\vec{x} \cdot \vec{n})(\vec{y} \cdot \vec{n}) \\ &\quad + 4(\vec{x} \cdot \vec{n})(\vec{y} \cdot \vec{n}) \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{n})}_1 = \vec{x} \cdot \vec{y} \end{aligned}$$

6. 17/3 - 2016

Låt A vara en symmetrisk 3×3 -matris. Den har ett enkelt egenvärde $\lambda_1 = 2$ med egenvektor $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, och

ett egenvärde $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ som är dubbelrot.

a) Låt $\vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$, hitta $A^3 \vec{w}$

b) Bestäm matrisen A .

a) Ett användbart trick är

$$A^n = P D^n P^{-1}$$

Eftersom A är symmetrisk är A diagonaliserbar. Behöver bara egenvektorer till λ_2 :

Vi vet:

- A diagonaliserbar $\Rightarrow$ Egenrummet till λ_2 har $\dim = 2$ (ett plan)
- A symmetrisk $\Rightarrow$ egenvektorer i olika egenrum är ortogonala

V_{λ_2} måste vara planet som har $\bar{v}_1$ som normal!

$$x + y - z = k$$

($k=0$ pga egentum innehåller $\bar{0}$)

Låt $y=t$, $z=s$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t+s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{v}_2$ $\bar{v}_3$

$$\text{Vi ser att } \bar{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = -3\bar{v}_2$$

Alltså ligger $\bar{w}$ i V_{λ_2} . Då blir

$$\begin{aligned} A^5 \bar{w} &= A^4 \lambda_2 \bar{w} = A^3 \lambda_2^2 \bar{w} = \dots = \lambda_2^5 \bar{w} = \\ &= (-2)^5 \bar{w} = -32 \bar{w} = -32 \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) $A = PDP^{-1}$, där

$$P = [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ och}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Behöver invertera P !

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array} \right]$$

Skriv ut på tentan!

$$\Rightarrow P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ -4 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

(Test: $A = A^T$,
så A är
symmetrisk)

6. 20/10 - 2017

Låt V vara vektorrummet som innehåller alla 2×2 -matriser.

a, Hitta en bas B till V .

b, $f: V \rightarrow V$ ges av

$$f(M) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} M, \text{ hitta } [f]_B$$

a, En godtycklig matris $M \in V$ är

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_2} + c \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{B_3} + d \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B_4}$$

Matriserna B_1, B_2, B_3, B_4 spänner upp V och är linjärt oberoende.
Kan då välja

$$B = \{ B_1, B_2, B_3, B_4 \}$$

$$b) [f]_B = \begin{bmatrix} [f(B_1)]_B & [f(B_2)]_B & [f(B_3)]_B & [f(B_4)]_B \end{bmatrix}$$

En matris

$$M = aB_1 + bB_2 + cB_3 + dB_4$$

har koordinater

$$[M]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \text{ relativt } B.$$

$$\begin{aligned} f(B_1) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2B_1 + 1B_3 \end{aligned}$$

$$f(B_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2B_2 + 1B_4$$

$$f(B_3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 1B_1 + 2B_3$$

$$f(B_4) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 1B_2 + 2B_4$$

$$\Rightarrow [f]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$