

Tenta 21/10 - 2016

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 8 & -3 & 10 \end{bmatrix}$

a, Bestäm alla lösningar till $A\bar{x} = \vec{0}$

b, Bestäm alla lösningar till

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

a, $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 7 & 0 \\ 8 & -3 & 10 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right] \sim$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array} \right]$$

Låt $x_3 = t$ vara fri

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{4}x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}t \\ x_2 = 4t \end{cases}$$

Svar: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}t \\ 4t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

b, $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 7 & -5 \\ 8 & -3 & 10 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \end{array} \right] \sim$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & -4 & 7 \end{array} \right]$$

Låt $x_3 = t$ vara fri

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{4}x_3 = \frac{9}{4} \\ x_2 - 4x_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{9}{4} + t\frac{1}{4} \\ x_2 = 7 + 4t \end{cases}$$

Svar:
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} + \frac{1}{4}t \\ 7 + 4t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/4 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Låt V vara skärningen mellan de två hyperplan i $\mathbb{R}^4$ som ges av

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

a, hitta en bas B till V

b, hitta ett ekvationssystem vars lösningar utgör delrummet

$$W = V^\perp$$

$V^\perp$ är det ortogonala komplementet till rummet V . Det innehåller allt som är ortogonalt mot allt i V .

Skärningen ges av lösningen till sysst.

$$a, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Låt $x_3 = t$, $x_4 = s$ vara fria

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -t - s \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -t-s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = t \bar{u}_1 + s \bar{u}_2$$

Vektorerna $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$ är linjärt oberoende och spänner upp V .
Kan då låta

$$\text{Svar: } B = \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2 \}$$

~~tho~~ $V = \text{Span}\{ \bar{u}_1, \bar{u}_2 \}$ är hela rummet
 $B = \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2 \}$ är bara två vektorer

b, För $\bar{v} \in V^\perp$ gäller att $\bar{v}$ är ortogonal mot alla vektorer i V . Det räcker att $\bar{v} \perp \bar{u}_1$ och $\bar{v} \perp \bar{u}_2$, eftersom då

$$\bar{v} \cdot (\underbrace{c_1 \bar{u}_1 + c_2 \bar{u}_2}_{\text{Godtycklig vektor i } V}) = c_1 \underbrace{\bar{v} \cdot \bar{u}_1}_0 + c_2 \underbrace{\bar{v} \cdot \bar{u}_2}_0 = 0$$

② m $\bar{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ så kräver vi

$$\begin{cases} 0 = \bar{v} \cdot \bar{u}_1 = -x_2 + x_3 \\ 0 = \bar{v} \cdot \bar{u}_2 = -x_2 + x_4 \end{cases}$$

Svar: $\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$

3, Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & a & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

- a, Bestäm egenvärden och egenrum till A
- b, För vilka a är A diagonaliserbar
- c, För $a=0$, bestäm en inverterbar matris P och en diagonal matris D , så att $A = PDP^{-1}$.
-

a, Det karakteristiska polynom

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & a & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)((4-\lambda)(5-\lambda) - 2) =$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 18)$$

Egenvärden ges av $p(\lambda) = 0$

$$\bullet \quad 3 - \lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 3$$

$$\bullet \quad \lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$$

$$\lambda = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 18} =$$

$$= \frac{9}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$\lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 6$$

$$\text{Alltså: } \lambda_1 = \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 6$$

$$\text{Egenrum ges av } (A - \lambda I) \vec{v} = \vec{0}$$

$$\lambda = 6: \begin{bmatrix} -3 & a & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{3} & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{3} & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{a}{6} & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Låt } x_3 = t \text{ vara fri}$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{a}{6} x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{2} x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a}{6} t \\ x_2 = \frac{1}{2} t \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{6} t \\ \frac{1}{2} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{a}{6} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda=3: \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & a & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

0m $a=0$: Let $x_1=t$, $x_3=s$

$$x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -s$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -s \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

0m $a \neq 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & a & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}, \text{ let } x_1 = t$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Svar: $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_3 = 6, \text{ med egenrum} \\ V_6 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\} \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 3, \text{ med egenrum} \\ V_3 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ om } a \neq 0 \\ V_3 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ om } a = 0 \end{array} \right.$

b, A är diagonaliserbar om vi har 3 oberoende egenvektorer.

Kräver då $a=0$.
← Svar

c,

$$P = [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

4. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Skiv A_{ij} för determinanten av den 2×2 -matris där vi stryker rad i och kolumn j ur A .

Visa att $a_{33} \det(A) = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21}$

$$\begin{aligned}
 \text{HL: } A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\
 &- \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\
 &= (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) (a_{11} a_{33} - a_{13} a_{31}) \\
 &- (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) (a_{12} a_{33} - a_{13} a_{32}) = \\
 &= a_{11} a_{22} a_{33}^2 - a_{11} a_{23} a_{32} a_{33} \\
 &- a_{13} a_{31} a_{22} a_{33} + a_{13} a_{31} a_{23} a_{32} \\
 &- a_{12} a_{21} a_{33}^2 + a_{12} a_{23} a_{31} a_{33}
 \end{aligned}$$

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{21} a_{13} a_{32} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

$$H \cdot L = a_{33} \det(A) = A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = V \cdot L$$

5. En reflektion i $\mathbb{R}^3$ är en linjär avbildning

$$R(\bar{x}) = \bar{x} - 2(\bar{x} \cdot \bar{n})\bar{n},$$

där $\bar{n}$ är en normal med längd 1 till reflektionsplanet,

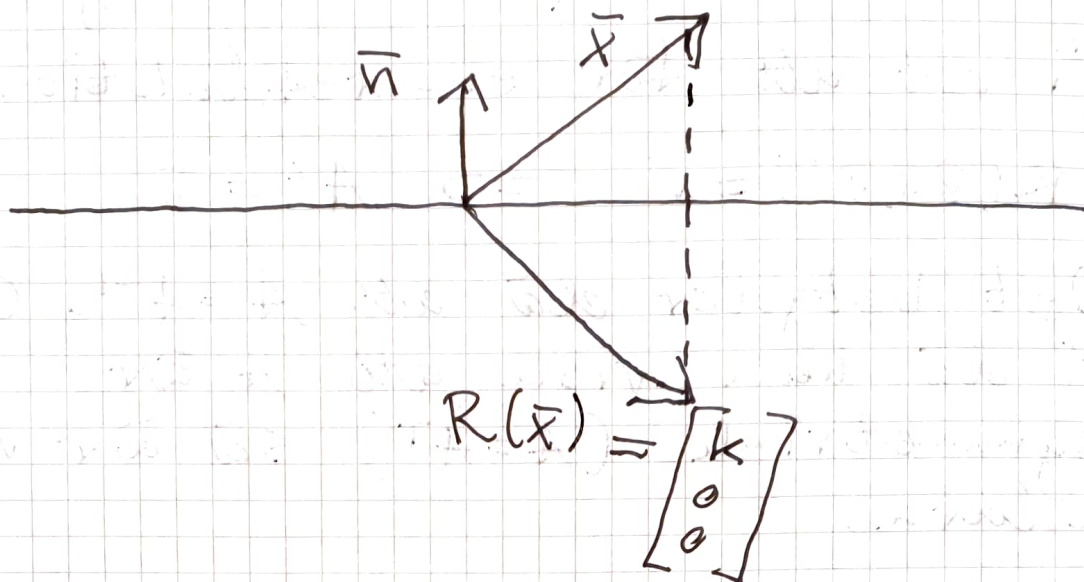
$$(\text{I allmänhet } R(\bar{x}) = \bar{x} - 2\text{proj}_{\bar{n}}(\bar{x}))$$

a, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, bestäm $\bar{n}$ så att

$R(\bar{x})$ blir en positiv multipel av $\bar{e}_1$.

b, Visa att standardmatrisen till R är ortogonal.

$$R(\bar{x}) = k\bar{e}_1 = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ där } k > 0$$



En vektor som är parallell med $\bar{n}$ är skillnaden

$$\bar{u} = \bar{x} - R(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-k \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Reflektioner bevarar längd!

$$|\bar{x}| = |R(\bar{x})|$$

$$\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = |k|$$

$$3 = |k| \Rightarrow k = 3$$

Då blir $\bar{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

Normering ger då

$$\bar{n} = \frac{1}{|\bar{u}|} \bar{u} = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Svar:
↓

b) $R(\bar{x}) = A\bar{x}$, vill då visa

$$A^T = A^{-1} \quad (A \text{ är ortogonal})$$

Vi vet att för en reflektion

$$R(R(\bar{x})) = \bar{x} \Rightarrow A^2 = I$$

Det betyder då att $A = A^{-1}$. Om vi då kan visa att A är symmetrisk ($A = A^T$) så är vi klara.

$$R(\bar{x}) = \bar{x} - 2(\bar{n} \cdot \bar{x})\bar{n} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v}^T \bar{u} = \bar{u}^T \bar{v} \\ (1 \times n)(n \times 1) = (1 \times 1) \end{array} \right\}$$

$$= \bar{x} - 2\bar{n}\bar{n}^T\bar{x} = (I - 2\bar{n}\bar{n}^T)\bar{x}$$

$$\Rightarrow A = I - 2\bar{n}\bar{n}^T, \text{ och}$$

$$A^T = I^T - (2\bar{n}\bar{n}^T)^T = \left\{ \begin{array}{l} (AB)^T = \\ = B^T A^T \end{array} \right\}$$

$$= I - 2(\bar{n}^T)^T \bar{n}^T =$$

$$= I - 2\bar{n}\bar{n}^T = A$$

Då är vi klara!

6. En matris A kallas
skersymmetrisk (eller anti-
symmetrisk) om $A^T = -A$. (*)

Antag att A är en $n \times n$ -matris
som är skersymmetrisk.

Bestäm alla $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ som uppfyller

$$(A\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$$

Vill ha ett samband mellan
skalärprodukt och transponat!

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} = \vec{v}^T \vec{u} \quad , \quad \text{Då blir}$$

$$(1) \quad (A\vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{v}^T A \vec{v} \quad (*)$$

$$(2) \quad (A\vec{v}) \cdot \vec{v} = (A\vec{v})^T \vec{v} = \vec{v}^T A^T \vec{v} \stackrel{\downarrow}{=} -\vec{v}^T A \vec{v}$$

(1) = (2) ger då

$$\vec{v}^T A \vec{v} = -\vec{v}^T A \vec{v}$$

$$2\vec{v}^T A \vec{v} = 0$$

$$\vec{v}^T A \vec{v} = 0 = (A\vec{v}) \cdot \vec{v}$$

$\Rightarrow$ Svar: Alla $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$