

* Kvadratiska former

En kvadratisk form Q i $\mathbb{R}^n$
är en funktion $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
som kan skrivas som

$$Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A x$$

där A är en symmetrisk ($A=A^T$)
 $n \times n$ -matris.

Ex

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(1x2) (2x2) (2x1)

$$\begin{aligned} Q(\bar{x}) &= \bar{x}^T A \bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 & 2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \\ &= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = \\ &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 \end{aligned}$$

Ex $Q(\bar{x}) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ i $\mathbb{R}^2$

Detta motsvarar matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$$

I allmänhet ges elementen a_{ij} i matrisen A av

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ii} = \text{koefficienten framför } x_i^2 \\ a_{ij} = \frac{1}{2} \text{ koefficienten framför } x_i x_j, \text{ för } i \neq j \end{array} \right.$$

Om A är diagonal, så får vi bara kvadrattermer.

* Klassifikation av k.f

En kvadratisk form $Q(\bar{x})$ kallas

- Positivt definit om $Q(\bar{x}) > 0 \quad \forall \bar{x} \neq \bar{0}$

- Negativt definit om $Q(\bar{x}) < 0 \quad \forall \bar{x} \neq \bar{0}$

- Indefinit om $Q(\bar{x})$ antar både positiva och negativa värden

- Positivt semidefinit om $Q(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall \bar{x} \neq \bar{0}$

- Negativt semidefinit om $Q(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall \bar{x} \neq \bar{0}$

* Diagonalisering av k.f

Eftersom A är symmetrisk
vet vi att den är ortogonalt
diagonaliserbar, dvs kan skriva

$$A = P D P^T \Leftrightarrow D = P^T A P$$

Låt $\mathcal{E} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ vara

ON-eigenbasen till A , så att

$$P = [\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n] = P_{\mathcal{E}} \rightarrow$$

vi får då

$$\begin{aligned} Q(\bar{x}) &= \bar{x}^T A \bar{x} = (P[\bar{x}]_{\mathcal{E}})^T A (P[\bar{x}]_{\mathcal{E}}) = \\ &= \left\{ (AB)^T = B^T A^T \right\} \end{aligned}$$

$$= [\bar{x}]_{\mathcal{E}}^T \underbrace{P^T A P}_{= D} [\bar{x}]_{\mathcal{E}} = [\bar{x}]_{\mathcal{E}}^T D [\bar{x}]_{\mathcal{E}}$$

$$\text{Om } [\bar{x}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \text{ får vi då}$$

$$Q(\bar{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2,$$

där $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ är egenvärden
till matrisen A .

- $Q(\bar{x})$ är positivt definit om $\lambda_i > 0 \quad \forall i$
- $Q(\bar{x})$ är negativt definit om $\lambda_i < 0 \quad \forall i$
- $Q(\bar{x})$ är indefinit om A har positiva och negativa egenvärden.
(För semidefinit, byt $>, <$ till $\geq, \leq$)

Ex Klassificera den kvadratiske formen $Q(\bar{x}) = -2x_1^2 + 12x_1x_2 + 7x_2^2$

$$Q(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}, \text{ där}$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Egenvärden till A ges av

$$\begin{aligned} 0 &= p(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 6 \\ 6 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (-2-\lambda)(7-\lambda) - 36 = \\ &= \lambda^2 - 5\lambda - 50 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 50} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4}} =$$

$$= \frac{5}{2} \pm \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 10 > 0 \\ \lambda_2 = -5 < 0 \end{cases}$$

Alltså är $Q(x)$ indefinit

* Allmänna vektorrum

Vilken mängd V som helst där det finns addition och multiplikation med skalär.
Vi kräver axiomen:

- För $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ och $s, t \in \mathbb{R}$
- $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$
- $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$
- Finns $\bar{0} \in V$ så att $\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$
- För varje $\bar{v} \in V$ finns $-\bar{v}$,
så att $\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$
- $1\bar{v} = \bar{v}$
- $s(t\bar{v}) = (st)\bar{v}$
- $s(\bar{v} + \bar{u}) = s\bar{v} + s\bar{u}$
- $(s+t)\bar{v} = s\bar{v} + t\bar{v}$

Vi kräver att summet är slutet under addition och multiplikation med skalär,

$$\begin{cases} \vec{v} + \vec{u} \in V \\ \lambda \vec{v} \in V \end{cases}$$

EX Låt V vara vektorrummet som innehåller alla symmetriska 2×2 -matriser.

a) Hitta en bas B till V

b) Hitta $\dim(V)$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, hitta $[A]_B$

a) En godtycklig symmetrisk 2×2 -matris är

$$\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= aB_1 + bB_2 + cB_3$$

Matriserna B_1, B_2, B_3 är linjärt oberoende, och spänner upp rummet. Kan då låta

$$B = \{B_1, B_2, B_3\}$$

b, $\dim(V) = 3$, eftersom basen innehåller 3 element.

c,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 1B_1 + 3B_2 - 1B_3 =$$

$$= c_1 B_1 + c_2 B_2 + c_3 B_3$$

$$\Rightarrow [A]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ex Låt P_3 vara vektorrummet av alla polynom med $\text{grad} \leq 3$

a, Bestäm en bas B till P_3

b, Låt $p(x) = 1 - x^3$, hitta $[p]_B$

c, Låt $D: P_3 \rightarrow P_3$ vara den linjära avbildning som deriverar polynom. Hitta matris $[D]_B$.

a, Ett godtyckligt polynom
 $p(x) \in \mathbb{P}_3$ kan skrivas

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 = \\ = ab_1 + bb_2 + cb_3 + db_4, \text{ där}$$

$$b_1 = 1, b_2 = x, b_3 = x^2, b_4 = \cancel{x} x^3$$

Dessa baspolynom spänner
upp $\mathbb{P}_3$, och är linjärt oberoende.
Vi kan då välja

$$B = \{1, x, x^2, x^3\}$$

b,

$$p(x) = 1 - x^3 = b_1 - b_4 = \\ = b_1 + 0b_2 + 0b_3 - b_4$$

$$\Rightarrow [p]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

c,

$$[D]_B = [D(b_1)]_B \quad [D(b_2)]_B$$

$$[D(b_3)]_B \quad [D(b_4)]_B]$$

$$D(b_1) = \frac{d}{dx}(1) = 0 \Rightarrow [D(b_1)]_B = \vec{0}$$

$$D(b_2) = \frac{d}{dx}(x) = 1 = b_1$$

$$\Rightarrow [D(b_2)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D(b_3) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x = 2b_2$$

$$\Rightarrow [D(b_3)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D(b_4) = \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2 = 3b_3$$

$$\Rightarrow [D(b_4)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[D]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Test: Låt $p(x) = x + 4x^2$
 $\Rightarrow D(p) = 1 + 8x$

Om $[D]_B$ är rätt, så ska

$$[D(p)]_B = [D]_B [p]_B$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ok!}$$

$$p(x) = c_1 b_1 + c_2 b_2 + c_3 b_3 + c_4 b_4$$

$$[p]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$