

1b.

$$\dim(\text{Col}(A)) + \dim(\text{Null}(A)) = n$$

Ex

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Col}(A) = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Men } A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \in \text{Null}(A)$$

$\text{Null}(A)$ och $\text{Col}(A)$ behöver inte vara helt skilda. I detta fall är

$$\text{Col}(A) \subseteq \text{Null}(A),$$

d.v.s $\text{Col}(A)$ är en linje som ligger i planet $\text{Null}(A)$.

* En $n \times n$ -matris kallas symmetrisk om $A = A^T$

EX

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

* En $n \times n$ -matris A kallas ortogonal om $A^{-1} = A^T$, dvs

$$A A^T = A^T A = I$$

Detta är ekvivalent med att den har ortonormala kolumner.

EX

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

* En $n \times n$ -matris D är diagonal om alla nollskilda element är på diagonalen

EX

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(Diagonalmatriser är symmetriska)

Ex Hitta egenvärden och egenvektorer till $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Det karakteristiska polynomet

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

Egenvärden ges av $p(\lambda) = 0$

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1$$

För varje λ , lösa $(A - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$

$$\lambda_1: \begin{bmatrix} -2 & 1 & | & 0 \\ 4 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Låt } x_2 = t \Rightarrow \bar{v}_1 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2: \begin{bmatrix} 2 & 1 & | & 0 \\ 4 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Låt } x_2 = t \Rightarrow \bar{v}_2 = t \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Svar: } \begin{cases} \lambda_1 = 3, \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = -1, \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Låt oss skapa matriserna

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P = [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Da blir

$$\begin{aligned} PDP^{-1} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 16 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = A \end{aligned}$$

* Diagonalisering -

Om en $n \times n$ -matris A har n oberoende egenvektorer $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ med egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sägs A vara diagonaliserbar.

Vi kan då skapa

$$P = [\bar{v}_1 \dots \bar{v}_n] \quad , \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

så att $A = PDP^{-1}$. Detta kallas för att diagonalisera A .

Om egenvektorererna är ON blir P ortogonal och vi får

$$A = PDP^T$$

Det kallas då ortogonal diagonalisering

$$\text{Jämför med } A = P_{B \rightarrow S} [A]_B P_{S \rightarrow B}$$

Alltså: P och P^{-1} är basbytesmatriser mellan standardbasen och en egenbas $E = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ till matrisen A .

Relativt en bas av sina egna egenvektorer blir en matris diagonal!

* Spektralsatsen

En matris A är ortogonalt diagonaliserbar om och endast om A är symmetrisk.

För att undersöka om en matris är diagonaliserbar:

Är A symmetrisk?

Om ja, diagonaliserbar via spektralsatsen

Om nej:

Har A n olika egenvärden?

Om Ja, diagonaliserbar eftersom att egenvektorer till olika egenvärden alltid är oberoende

Om nej:

Har A n oberoende egenvektorer?

Om Ja, diagonaliserbar

Om nej, ej diagonaliserbar

Ex

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Avgör om dessa matriser är diagonaliserbara.

A är symmetrisk och därför diagonaliserbar.

$$B: p(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\ = (3-\lambda)^2$$

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3$$

$$(B - \lambda I)\bar{v} = \bar{0} \text{ ger}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \text{ Låt } x_1 = z$$

$$\Rightarrow \bar{v} = z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finns bara 1 oberoende egenvektor $\Rightarrow$ ej diagonaliserbar.

* Egenrum

Lösningssmängden till $(A - \lambda_i I)\bar{v}_i = \bar{0}$ kallas för egenrummet till egenvärdet λ_i , skriver V_{λ_i} .

Ex $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ har egenrummet

$$V_3 = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ till } \lambda = 3$$

Allt i egenrummet är egenvektorer till motsvarande egenvärde!

* Geometrisk och algebraisk multiplicitet

Om $(\lambda - a)^k$ är en faktor i det karakteristiska polynomet sägs $\lambda = a$ vara ett egenvärde med algebraisk multiplicitet k

$\left\{ \begin{array}{l} k=1 : \text{enkel rot, enkelt} \\ k=2 : \text{dubbelrot} \\ \vdots \\ \vdots \text{ osv} \end{array} \right.$

$\dim(V_a)$, dvs antalet oberoende egenvektorer till $\lambda = a$, kallas för dess geometriska multiplicitet. Det gäller då att

$$\text{geo. mult.} \leq \text{alg. mult.}$$

Om dessa är samma (=) för varje egenvärde är en matris diagonaliserbar.

(alltid = för enkel rot,)
(där båda blir 1)

Användbart trick för att
räkna höga potenser av en
matris:

För en diagonalmatris

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_m \end{bmatrix}$$

så gäller att

$$D^n = \begin{bmatrix} a_1^n & & 0 \\ & a_2^n & \\ & & \ddots \\ 0 & & & a_m^n \end{bmatrix}$$

Om A är diagonaliserbar är

$$\begin{aligned} A^n &= (PDP^{-1})^n = P \underbrace{D P^{-1} P D P^{-1} \dots P D P^{-1}}_I = \\ &= P D I D \dots I D P^{-1} = P D^n P^{-1} \end{aligned}$$

D^n är lätt att hitta!

Ex 1 Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, hitta P
och D så att $A = PDP^T$

Ex 2 Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, beräkna

$$A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ när } n \rightarrow \infty.$$

Ex 1 $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$
 $= (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = (\pm \sqrt{1+3}) = 1 \pm 2$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

$$\lambda_1: \begin{bmatrix} -2 & -2 & | & 0 \\ -2 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Låt } x_2 = t \Rightarrow \bar{v}_1 = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2: \begin{bmatrix} 2 & -2 & | & 0 \\ -2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Låt } x_2 = t \Rightarrow \bar{v}_2 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

För att så $PT = P^{-1}$ måste P vara ortogonal, dvs ha ortonormala kolonner.

$\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$ är ortogonala automatiskt eftersom de hör till olika egenvärden och A är symmetrisk. Måste normera!

$$1 = |\bar{v}_1| = t\sqrt{2} \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$1 = |\bar{v}_2| = s\sqrt{2} \Rightarrow s = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vi får då

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P = [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Kan behöva göra Gram-Schmidt på egenvektorer i samma egenrum. De i olika egenrum är alltid ortogonala mot varandra om matrisen är symmetrisk.

Ex 2 A har egenvärden $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 1$,
med egenvektorer

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Alternativ 1:

$$A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = P D^n P^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Alternativ 2:

$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ bildar en egenbas till $\mathbb{R}^2$
kan då skriva

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2, \text{ som ger}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -6 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 7 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow c_1 = 1, \quad c_2 = 7$$

Då blir

$$A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A^n (c_1 \bar{v}_1 + c_2 \bar{v}_2) =$$

$$= c_1 A^n \bar{v}_1 + c_2 A^n \bar{v}_2 = c_1 \lambda_1^n \bar{v}_1 + c_2 \lambda_2^n \bar{v}_2 =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\rightarrow 0} \bar{v}_1 + 7 \underbrace{(1)^n}_{=1} \bar{v}_2$$

$\rightarrow 7\bar{v}_2$, när $n \rightarrow \infty$