

## \* Koordinater relativt baser

Låt  $B = \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$  vara en bas till ett vektorrum  $V$ .  
Varje  $\bar{x} \in V$  kan då på ett unikt sätt skrivas som

$$\bar{x} = c_1 \bar{b}_1 + c_2 \bar{b}_2 + \dots + c_n \bar{b}_n$$

Vi kallar  $c_1, \dots, c_n$  för koordinaterna för  $\bar{x}$  relativt basen  $B$ . Vi skriver

$$[\bar{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

(Koordinatvektor för  $\bar{x}$  relativt  $B$ )

Ex Om  $B = S$  ( $S = \text{standardbasen}$ )

$$\bar{x} = c_1 \bar{e}_1 + c_2 \bar{e}_2 + \dots + c_n \bar{e}_n$$

$$[\bar{x}]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \bar{x}$$

Ex

$$\text{Låt } A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a, Hitta en bas  $B$  till  $\text{Col}(A)$

b,  $\bar{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ , hitta  $[\bar{x}]_B$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & -11 & 11 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rang}(A) = 2$ , då kan vi välja

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$$

b)  $\bar{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{x} = c_1 \bar{b}_1 + c_2 \bar{b}_2 \quad (1)$

Om  $\bar{x} \in \text{Col}(A)$  finns en unik lösning  $c_1, c_2$ .

Om  $\bar{x} \notin \text{Col}(A)$  finns ingen lösning

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + 7c_2 \\ 2c_1 + 3c_2 \\ -c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + 7c_2 = -3 \\ 2c_1 + 3c_2 = 5 \\ -c_2 = 1 \end{cases}$$



$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 7 & -3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 7 & -3 \\ 0 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$[\bar{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Test:  $\bar{x} = c_1 \bar{b}_1 + c_2 \bar{b}_2 = 4 \bar{b}_1 - \bar{b}_2 = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} =$   
 $= \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$  oh!

## \* Basbytesmatriser

Låt  $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$  och  $C = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$  vara baser till samma vektorrum  $V$ . Då är

$$P_{B \rightarrow C} = [\begin{bmatrix} \bar{v}_1 \end{bmatrix}_C \quad \dots \quad \begin{bmatrix} \bar{v}_n \end{bmatrix}_C]$$

basbytesmatrisen från  $B$  till  $C$ . Den uppfyller

$$[\bar{x}]_C = P_{B \rightarrow C} [\bar{x}]_B$$

På samma sätt är

$$P_{C \rightarrow B} = [\begin{bmatrix} \bar{w}_1 \end{bmatrix}_B \quad \dots \quad \begin{bmatrix} \bar{w}_n \end{bmatrix}_B], \text{ och}$$

$$[\bar{x}]_B = P_{C \rightarrow B} [\bar{x}]_C$$

Eftersom basvektorer alltid är oberoende är dessa matriser alltid inverterbara, och

$$P_{C \rightarrow B} = P_{B \rightarrow C}^{-1}, \quad P_{B \rightarrow C} = P_{C \rightarrow B}^{-1}$$

Ex  $S = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  och

$$B = \{\bar{b}_1, \bar{b}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ är}$$

två baser till  $\mathbb{R}^2$ . Hitta  $P_{S \rightarrow B}$



$$\text{Alt 1: } P_{S \rightarrow B} = \begin{bmatrix} [\bar{e}_1]_B & [\bar{e}_2]_B \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}_1 = c_1 \bar{b}_1 + c_2 \bar{b}_2$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} = c_2$$

$$\bar{e}_2 = c_3 \bar{b}_1 + c_4 \bar{b}_2$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow c_3 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = \frac{1}{2}$$

$$P_{S \rightarrow B} = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Alt 2:

$$P_{B \rightarrow S} = \begin{bmatrix} [\bar{b}_1]_S & [\bar{b}_2]_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 & \bar{b}_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{array} \right]$$

$$P_{S \rightarrow B} = P_{B \rightarrow S}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

När en av baserna är  $S$ ,  
kan det vara snabbare att  
invertera  $P_{B \rightarrow S}$ .

Test:  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} [\bar{x}]_B &= P_{S \rightarrow B} \bar{x} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= c_1 \bar{b}_1 + c_2 \bar{b}_2 = -\frac{1}{2} \bar{b}_1 + \frac{3}{2} \bar{b}_2 = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ok!} \end{aligned}$$

### \* Avbildningar relativt baser

Låt  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  vara en linjär  
avbildning, och  $B = \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$  vara  
en bas till  $\mathbb{R}^n$ .

Vill ha:  $[T(\bar{x})]_B = [T]_B [\bar{x}]_B$

$$[T(\bar{x})]_B = [T(c_1 \bar{b}_1 + \dots + c_n \bar{b}_n)]_B =$$

$$= [c_1 T(\bar{b}_1) + \dots + c_n T(\bar{b}_n)]_B =$$

$$= c_1 [T(\bar{b}_1)]_B + \dots + c_n [T(\bar{b}_n)]_B =$$



$$= \begin{bmatrix} [T(\bar{b}_1)]_B & \dots & [T(\bar{b}_n)]_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} =$$

$$= [T]_B [\bar{x}]_B$$

Alltså är

$$[T]_B = \begin{bmatrix} [T(\bar{b}_1)]_B & \dots & [T(\bar{b}_n)]_B \end{bmatrix}$$

Om  $B=S$  får vi

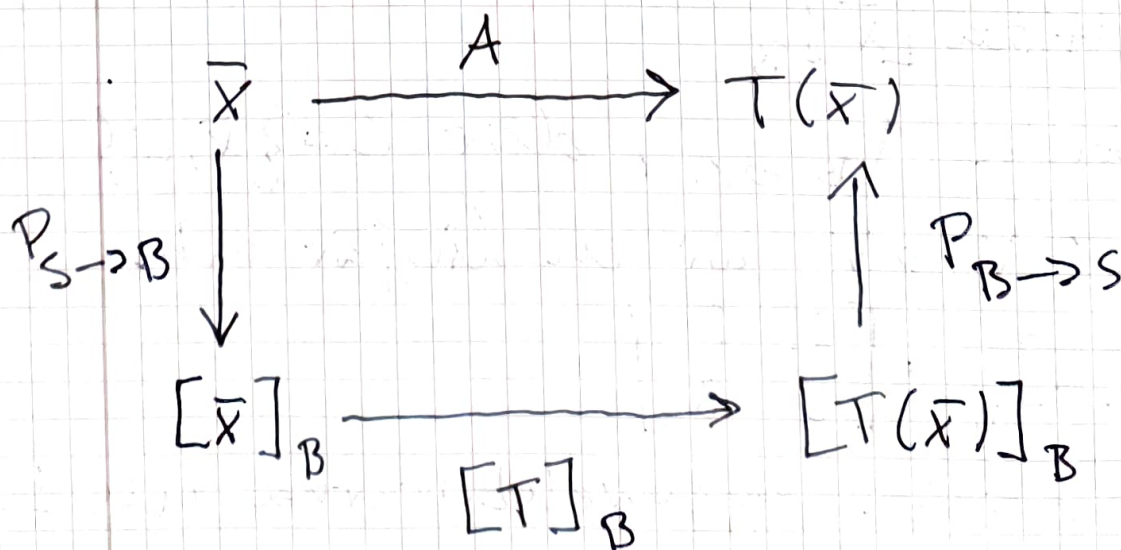
$$[T]_S = [T(\bar{e}_1) \dots T(\bar{e}_n)],$$

d.v.s standardmatriser. Kan vi hitta  $[T]_B$  via  $[T]_S = A$ ?

$$[T(\bar{x})]_B = P_{S \rightarrow B} T(\bar{x}) = P_{S \rightarrow B} A \bar{x} =$$

$$= \underbrace{P_{S \rightarrow B} A P_{B \rightarrow S}}_{[T]_B} [\bar{x}]_B$$

$$[T]_B = P_{S \rightarrow B} A P_{B \rightarrow S}$$



Mer allmänt

$$[T]_{B_1} = P_{B_2 \rightarrow B_1} [T]_{B_2} P_{B_1 \rightarrow B_2}$$

Ex 1

$$\text{Låt } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a, Hitta en bas  $B_1$  till  $\text{Col}(A)$

b, Hitta en ON-bas  $B_2$  till  $\text{Col}(A)$

Hint: Finns genväg

c,  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ , hitta  $[\bar{x}]_{B_1}$

Ex 2

$$\bar{e} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \bar{f} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a,  $B = \{\bar{e}, \bar{f}\}$  är en bas till  $V \subseteq \mathbb{R}^4$ .

Hitta  $[\bar{x}]_B$

b, Hitta  $P_{B \rightarrow C}$ , där  $C = \{\bar{x}, \bar{y}\}$

c,  $L: V \rightarrow V$  är en linjär avb.

$$[L]_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Bestäm egenvektorer till  $L$ .



Ex 1

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\text{rang}(A) = 3 \Rightarrow$  alla tre kolonner  
är linjärt oberoende

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

b,  $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^3$ , eftersom 3  
oberoende vektorer i  $\mathbb{R}^3$   
spänner upp hela  $\mathbb{R}^3$ . Kan  
då välja t.ex

$$B_2 = S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$c) \bar{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow [\bar{x}]_B = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 7/6 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

a, vill lösa  $\bar{x} = c_1 \bar{e} + c_2 \bar{f}$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 5 & 5 & 1 \\ 9 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$[\bar{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

b)  $P_{B \rightarrow C} = \begin{bmatrix} [\bar{e}]_C & [\bar{f}]_C \end{bmatrix}$

$$\bar{e} = c_1 \bar{x} + c_2 \bar{y}$$

$$\bar{f} = c_3 \bar{x} + c_4 \bar{y}$$

Lösning av ekv. syst. ger

$$c_1 = 1, c_2 = 4$$

$$c_3 = 2, c_4 = 3$$

$$P_{B \rightarrow C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$



6,  $[L]_B = D$  är diagonal

Vi ser då att

$$p(\lambda) = \det(D - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\ = (2-\lambda)(3-\lambda)$$

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

En diagonalmatris har egenvärden som ges av diagonalelementen.

För egenvektorer: Lös  $(D - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

$$D - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad x_1 = t \Rightarrow \vec{v}_1 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$x_2 = t \Rightarrow \vec{v}_2 = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{v}_1]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{v}_1 = 1\bar{e} + 0\bar{f} = \bar{e}$$

$$[\bar{v}_2]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{v}_2 = 0\bar{e} + 1\bar{f} = \bar{f}$$

Relativt en bas av sina egna egenvektorer blir en matris diagonall