

1] $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ a) sök egenvärden med deras resp. egenrum

Lösning

egenvärden: $0 = \det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda((\lambda - 1)\lambda - 2) - 2(1 + \lambda) + 1(-2 - (\lambda - 1))$

$-1 - \lambda = -(1 + \lambda)$

$$= \lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) - 3(\lambda + 1) = \lambda((\lambda - 2)(\lambda + 1)) - 3(\lambda + 1) = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = (\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

$\rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_{2,3} = -1$

egenrum: $\lambda_1: \left[3I - A \mid \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[R_2 + R_3]{R_1 - 3R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -8 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[R_3 + \frac{R_1}{4}]{-R_1/8} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$

$\rightarrow \begin{matrix} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 \text{ fritt} \end{matrix}$ Låt $x_3 = t \in \mathbb{R}$ Det ger $\vec{x} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow E_{\lambda=3} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\vec{v}_1$

$\lambda_{2,3}: \left[A + I \mid \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[R_3 + R_1]{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \begin{matrix} x_1 = -2x_2 + x_3 \\ x_2, x_3 \text{ fria} \end{matrix}$ Låt $x_2 = t \in \mathbb{R}$
 $x_3 = s \in \mathbb{R}$
Det ger

$\vec{x} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow E_{\lambda=-1} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\vec{v}_2, \vec{v}_3$

b) sök A diagbar?

Vi såg ovan att vi har 3 st egenvärden där den algebraiska multipliciteten till varje unikt egenvärde var samma som den geometriska $\rightarrow \lambda = -1$ hade 2 rötter och det finns 2 egenvektorer till (linj. ober.), $\lambda = 3$ hade 1 rot och det finns 1 egenvektor.

Enligt sats ger det att A är diagonaliserbar.

c) sök har $\mathbb{R}^3$ ortonormal bas av egenvektorer till A?

Lösning

Nej. För att det ska finnas en ortonormal bas av egenvektorer till $\mathbb{R}^3$ måste A vara ortogonalt diag. bar. A är endast det om A är symmetrisk. — $A^T = A$. Men $A^T \neq A \rightarrow A$ är ej ortogonalt diag. bar
Alltså finns ingen ortonormal bas av egenvektorer.

2] $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ a) sök värde på a så att A är diag. bar

Lösning

A diagbar om $\exists$ 2 egenvärden med samma algebraiska multiplicitet som geometriska.

$$\lambda: 0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -a & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1) + a = \lambda^2 - 3\lambda + 2 + a = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2 - a}$$

krav: reella rötter ger att $0 \leq \sqrt{\frac{9}{4} - 2 - a} \rightarrow 0 \leq \frac{9}{4} - 2 - a \rightarrow a \leq \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4}$

Om $a < \frac{1}{4} \rightarrow \lambda_1$ och λ_2 kommer att vara distinkta och reella $\rightarrow$ diagonaliserbar

$$\text{om } a = \frac{1}{4} \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3}{2}$$

$$\left[\frac{3}{2} I - A \left(\frac{1}{4} \right) \middle| 0 \right] = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 \\ -1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 - 2R_2 \\ -R_2 \cdot 4 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2x_2 \\ x_2 \text{ fr} \end{matrix} \xrightarrow{\text{Låt}} \vec{x} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{och } E_{\lambda=\frac{3}{2}} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

algebraiska multipliciteten: 2, geometriska: 1 $\rightarrow$

Svar A ej dragbar
för $a \geq \frac{1}{4}$, men
för $a < \frac{1}{4}$ dragbar.

b) söks värde på a så att A är ortogonalt diag. bar.

Lösning A endast ortogonalt diag. bar om $A^T = A \rightarrow a = -1$

endast då är den ortogonalt diag. Vi ser också att $a < \frac{1}{4}$

$\rightarrow$ kravet från uppgift a) ger att A är dragbar också.

c) söks för $a=0$ Lös egenvärden och egenrum

$$\text{Lösning } 0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$$

$$\text{egenrum: } \lambda_1: \left[2I - A \middle| 0 \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 \text{ fr} \\ x_2 = 0 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Låt } x_1 = t \in \mathbb{R}} \vec{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow E_{\lambda=2} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\lambda_2: \left[I - A \middle| 0 \right] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ x_2 \text{ fr} \end{matrix} \xrightarrow{\text{Låt } x_2 = s \in \mathbb{R}} \vec{x} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow E_{\lambda=1} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

svar: $\lambda_1 = 2$ med $E_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ och $\lambda_2 = 1$ med $E_1 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$3] \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \} \text{ bas}$$

a) söks $P_{B \rightarrow E}$

Lösning

$$P_{B \rightarrow E} = \left[[\vec{u}]_E \quad [\vec{v}]_E \quad [\vec{w}]_E \right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) \text{ Vi har } T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ linj. avb. med } [T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ söks } [T]_E$$

Lösning

$$[T]_E = P_{B \rightarrow E} [T]_B P_{E \rightarrow B} = P_{B \rightarrow E} [T]_B P_{B \rightarrow E}^{-1}$$

vi räknar ut $P_{B \rightarrow E}^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[R_2 - 2R_1]{R_1 - 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[R_2 + 7R_3]{R_1 + 2R_3, R_2/3}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[R_3 - R_2/3]{R_1 + R_2/3, R_2/3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \end{array} \right] \uparrow \text{byta plats}$$

$$\dots \rightarrow P_{B \rightarrow E}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow [T]_E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -5 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$\bullet \left(\lambda^2 + a\lambda + b \right) \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$
 $\rightarrow \lambda_1 = \dots$ Bra!
 notering för pq-formel som behövs
 $\bullet \det(\lambda I - A) = 0 \rightarrow \lambda_1 = \dots \lambda_2 = \dots$ ej!
 $\rightarrow \bullet \left| \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \right| = \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \rightarrow \lambda_1 = \dots \lambda_2 = \dots$ går bra!

Uppgift 8. Den kvadratiske formen Q på $\mathbb{R}^2$ ges av

$$Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.$$

(a) Ange den symmetriska matris A som uppfyller $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$.

(b) Avgör om Q är positivt definit, negativt definit, positivt semidefinit, negativt semidefinit eller indefinit.

Skärmklipp gjort: 2020-12-07 11:42

$\swarrow$ alla egenvärden pos.
 $\searrow$ både pos. och neg. egenvärden
 $\nearrow$ negativa
 $\leq$
 $\rightarrow$

a) Låt $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ Det ges $Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + \frac{x_2}{2} \\ \frac{x_1}{2} + x_2 \end{bmatrix} = x_1 \left(x_1 + \frac{x_2}{2} \right) + x_2 \left(\frac{x_1}{2} + x_2 \right) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) diagonaliserar $Q \rightarrow A$.

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1/2 \\ -1/2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - \frac{1}{4} = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} \rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = 1 \pm \frac{1}{2}$$

$\lambda_1 = \frac{3}{2}$ $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. 2 distinkta och reella egenvärden $\rightarrow A$ är dragbar
och $\lambda_1 > 0$ och $\lambda_2 > 0 \rightarrow A$ och därför Q är pos. definit.
Svar: Q pos. definit

9] skriv Q på formen $\vec{x}^T A \vec{x} + \vec{k} \vec{x} + f = 0$ ↑
antallet
okända parametrar

a) $2x^2 + xy + x - 6y + 2 = 0$ $1 \times n$

Lös

$\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow 0 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -6 \end{bmatrix}}_{\vec{k}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 2$
