

$$1] L(\vec{x}) = A \vec{x}, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

a) söks en bas B för $\text{Im} L$, samt varför B är en bas

Lösning

Löser för bildrummet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_1 - 2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{pivot i kolumn 1 och 2} \\ \text{vilket ger}$$

$$\text{Im} A = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\} \quad \begin{matrix} \uparrow \uparrow \uparrow \\ \text{e.i. obero.} \end{matrix}$$

dessa 2 vektorer utgör en bas för B eftersom de är linjärt oberoende.

$$\rightarrow \text{bas } B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

b) vill vi bilda en bas B' för $\mathbb{R}^3$ utifrån B .

Lösning

en bas för $\mathbb{R}^3$ kräver 3 vektorer och B består av 2. vi behöver komplettera med 1 linjärt oberoende vektor.

Vi vet att kryssprodukten ger vekt $\perp$ mot båda vektorerna så kryssas. Om $\perp \rightarrow$ linjärt obero.

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -6+1 \\ 2+3 \\ -1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det ger } B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$$

$$2] W = \ker A, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

a) söks ortonormal bas för W

Lösning

1) hitta nollrummet

$$\left[A \mid 0 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2/4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 & 7/4 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 & -3/2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 & 7/4 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 + 2x_5 \\ x_2 = -\frac{3}{4}x_3 - \frac{7}{4}x_4 - x_5 \end{cases}$$

Låt $x_3 = t, x_4 = s, x_5 = l$
där $t, s, l \in \mathbb{R}$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1/2 & -5/2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 & 7/4 & -3/4 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}x_3 + \frac{5}{2}x_4 + 2x_5 \\ x_2 &= -\frac{3}{4}x_3 - \frac{7}{4}x_4 + \frac{x_5}{2} \end{aligned}$$

Låt $x_3=t, x_4=s, x_5=l$
där $t, s, l \in \mathbb{R}$
det ger

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3/2 \\ -7/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ vi får } W = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3/2 \\ -7/4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Låt $\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ vara bas för W
som ej är ortogonal/ortogonal

2) • $\vec{v}_1 = \vec{w}_1, \|\vec{v}_1\| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$, låt $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 / \|\vec{v}_1\| = \frac{1}{\sqrt{29}} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

• $\vec{v}_2 = \vec{w}_2 - \text{proj}_{\vec{v}_1} \vec{w}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\vec{w}_2 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{(2 \cdot 6 + 3 \cdot 7)}{29} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -26 \\ -33 \\ 29 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\|\vec{v}_2\| = \frac{4}{29} \sqrt{27^2 + 26^2 + 33^2 + 29^2} = \frac{4}{29} \sqrt{3335}, 3335 = 115 \cdot 29$

$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 / \|\vec{v}_2\| = \frac{27}{\sqrt{3335}} \begin{bmatrix} 27 \\ -26 \\ -33 \\ 29 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3335}} \begin{bmatrix} 27 \\ -26 \\ -33 \\ 29 \\ 0 \end{bmatrix}$

• $\vec{v}_3 = \vec{w}_3 - \text{proj}_{\vec{v}_1} \vec{w}_3 - \text{proj}_{\vec{v}_2} \vec{w}_3 = \vec{w}_3 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 - \frac{\vec{w}_3 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|^2} \vec{v}_2 =$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{(4 \cdot 2 + 1 \cdot 3)}{29} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{(27 \cdot 4 + 26 \cdot 1)}{4 \cdot 3335} \cdot \frac{4}{29} \begin{bmatrix} 27 \\ -26 \\ -33 \\ 29 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3335} \begin{bmatrix} 9976 \\ 7192 \\ 406 \\ -2378 \\ 6670 \end{bmatrix}$$

$\|\vec{v}_3\| = \frac{1}{3335} \sqrt{201554060} \rightarrow \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{201554060}} \begin{bmatrix} 9976 \\ 7192 \\ 406 \\ -2378 \\ 6670 \end{bmatrix}$

Svar: ortormal bas $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$

b) kolla att det är en ortormal bas.

- kolla att skalärprodukten är noll mellan basvektorer
- kolla att längd är 1

$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{29}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3335}} (2 \cdot 27 + 26 \cdot 3 - 33 \cdot 4) = 0$

... alla $u_i \cdot u_j = 0$ för $j \neq i$

och = 1 för $j = i$

- 3] söks
 a, b, c parametrer i modellen där $z = f(x, y) = ax^2 + by + c$
 vi vill hitta MKM-lösningen på a, b, c till modellen givet mätdata

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ y & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ z & 5 & -3 & 1 & -4 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \quad b)$$

Lösning
 Vi läser $\vec{z} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ från tabellen och $\vec{u} = \begin{bmatrix} c \\ a \\ b \end{bmatrix}$ från tabellen enligt
 Nu bildar vi matrisen A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1^2 & y_1 \\ 1 & x_2^2 & y_2 \\ 1 & x_3^2 & y_3 \\ 1 & x_4^2 & y_4 \\ 1 & x_5^2 & y_5 \\ 1 & x_6^2 & y_6 \\ 1 & x_7^2 & y_7 \\ 1 & x_8^2 & y_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

↑ ↑
konstanten a c

vi hittar minsta kvadrat lösningen genom $A^T A \vec{u} = A^T \vec{z}$

• bilda $A^T \vec{z}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ -4 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

• $A^T A = \dots = \begin{bmatrix} 8 & 12 & 2 \\ 12 & 36 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

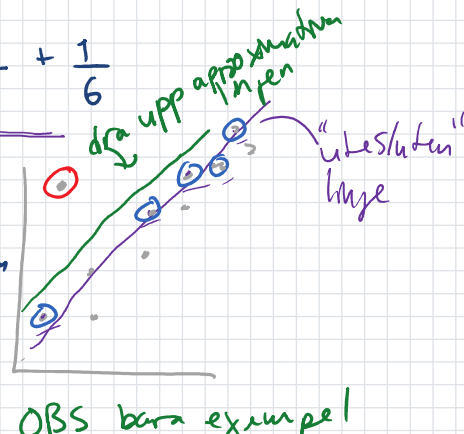
↑
 gör uträkningarna på tentan!

$$\left[A^T A \mid A^T \vec{z} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 12 & 2 & -2 \\ 12 & 36 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 8 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_1 - 4R_3 \\ R_2 - R_1 - 2R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 12 & -30 & 18 \\ 0 & 24 & -18 & 8 \\ 2 & 0 & 8 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_1/6 \\ R_2/2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 12 & 9 & 4 \\ 2 & 0 & 8 & -5 \end{array} \right] \sim \dots$$

$$\dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 3 - 16/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \\ 2 & 0 & 0 & -5 + 16/3 \end{array} \right] \rightarrow \begin{aligned} c &= \frac{-15 + 16}{6} = \frac{1}{6} \\ a &= \frac{9 - 10}{6} = -\frac{1}{6} \\ b &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Svar: Minsta kvadratlös. är $z = -\frac{x^2}{6} - \frac{2y}{3} + \frac{1}{6}$

- b) Om vi endast använder andra halvan kommer vi troligtvis (men inte nödvändigtvis) få andra värden på a, b, c , eftersom lösningen är utifrån given data.



4] $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ a) visa att $B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ är en bas för $\mathbb{R}^3$

Lösning en bas för

för $\mathbb{R}^3$ krävs 3 linj. oberoende vektorer. Vi kollar om $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ är linj. oberoende.

$$\begin{vmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1(-4-1) - 1(0-2) = -5 + 2 = -3 \neq 0 \rightarrow \text{alltså är } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ linj. oberoende.}$$

och utgör en bas för $\mathbb{R}^3$

b) vi vill bestämma koordinat för $\vec{e}_1$ m.a.p basen B , : $[\vec{e}_1]_B$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}_E \quad E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots\}$$

Lösning

vi vill hitta konstanter a_1, a_2, a_3 så att $\vec{e}_1 = a_1\vec{u} + a_2\vec{v} + a_3\vec{w}$

$$\begin{aligned} &\rightarrow [\vec{e}_1]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \\ &[\vec{u} \ \vec{v} \ \vec{w} \ | \ \vec{e}_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2+R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3-R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} R_1+R_3/3 \\ R_2+R_3/3 \\ R_3/3 \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{array} \right] \\ &\rightarrow a_1 = 5/3, a_2 = 2/3, a_3 = 1/3 \rightarrow [\vec{e}_1]_B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Uppgift 6. Låt

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_2, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

verifiera att planen inte skär varandra

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

icke konsistent

a) Lösning

$$\text{Col } B = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

och med att kolonnerna i B är tydligt linj. oberoende.

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} R_1+2R_2 \\ R_3-R_2 \end{matrix}} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3+R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow 2 \text{ pivots. Col } A = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Vi hittar oss i $\mathbb{R}^3 = \text{span} \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2 \}$ och varje kolonnrum har 2 vektorer $\rightarrow$ plan

(a) Bestäm alla vektorer som ligger i både $\text{Col}(A)$ och $\text{Col}(B)$. Förklara varför alla vektorer som ligger i både $\text{Col}(A)$ och $\text{Col}(B)$ bildar ett delrum i $\mathbb{R}^3$ och beräkna dess dimension.

- (a) Bestäm alla vektorer som ligger i båda $\text{Col}(A)$ och $\text{Col}(B)$. Förklara varför alla vektorer som ligger i båda $\text{Col}(A)$ och $\text{Col}(B)$ bildar ett delrum i $\mathbb{R}^3$ och beräkna dess dimension.
 (b) Bestäm en vektor i $\text{Col}(A)$ som inte ligger i $\text{Col}(B)$.

Skärmklipp gjort: 2020-11-30 16:47

Col A består av 2 vektorer

→ skapa normalen till det planet

$$\vec{n}_A = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

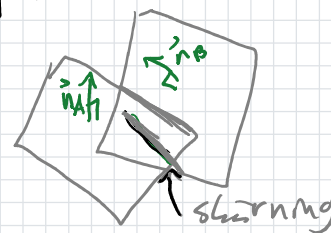
p.s.s. till B får vi

$$\vec{n}_B = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{skärningen fås av } \vec{w} = \vec{n}_A \times \vec{n}_B = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vår skärning spänns upp av $\text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

och varje kolonnrum har 2 vektorer
 → plan



dim av skärningen kommer att
 vara 1 (en linje) i och med
 att planerna inte är identiska