

1) a) sökes $A = [S] \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösning

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \vec{u}_{//} + \vec{u}_{\perp}$$

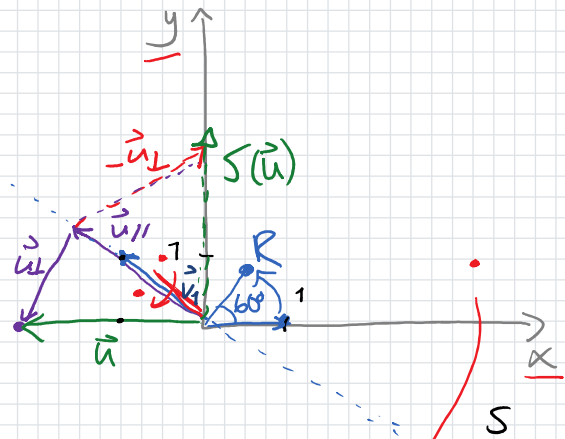
$$\vec{u}_{//} = \text{proj}_{\vec{v}_1} \vec{u}, \quad \vec{u}_{\perp} = \vec{u} - \vec{u}_{//}$$

$$S(\vec{u}) = \vec{u}_{//} - \vec{u}_{\perp} = \vec{u}_{//} - (\vec{u} - \vec{u}_{//}) =$$

$$= 2\vec{u}_{//} - \vec{u} = 2\text{proj}_{\vec{v}_1} \vec{u} - \vec{u} =$$

$$= 2 \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 - \vec{u} = \frac{2(-a+b)}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1(-a+b) - a \\ 1(-a+b) - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Det ger $[S] = A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$



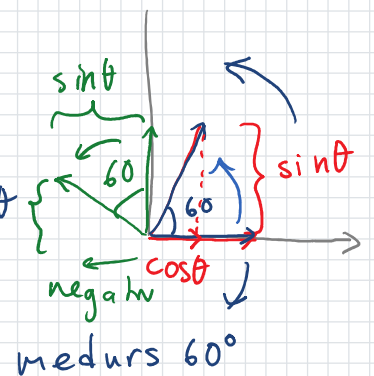
b) sökes $[R] = B$

Lösning $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$B = [R(\vec{e}_1) \quad R(\vec{e}_2)] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \left\{ \theta = 60^\circ \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$\theta = -60^\circ$



$$\begin{bmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos 60^\circ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}$$

c) sökes är $S \circ R = R \circ S$

Lösning

Om $S \circ R = R \circ S$ måste $[S \circ R] = [R \circ S]$

$$\Rightarrow [S \circ R] = [S][R] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$[R \circ S] = [R][S] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix} \neq [S \circ R]$$

Svar alltså stämmer det inte

d) Beskriv den linjär avb. som representeras av $B^{-6}A^3$

Vi vill hitta T så att $[T] = B^{-6}A^3 = (B^{-1})^6 A^3$

R : rotation runt ...

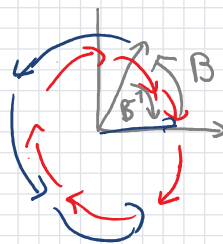
B: rotation moturs 60°

$$B^{-1}B = I$$

$\rightarrow B^{-1}$ rotation medurs 60°

$$\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6 \text{ g\aa}nger$$

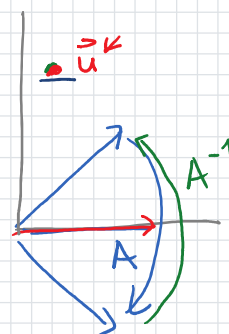
$$B^{-1} \text{ sker } 6 \text{ g\aa}nger \rightarrow (B^{-1})^6 = I$$



A: A spegling kring vektor v.

$$A^{-1} = A$$

$$A^3 = AAA = \underbrace{AA^{-1}}_I A = A$$



$$AA = I$$

Svar: $[T] = \underbrace{B^{-6}}_I \underbrace{A^3}_A = A \rightarrow T = S$

$$A^{-1}(A\vec{u}) = \vec{u} = A(A\vec{u})$$

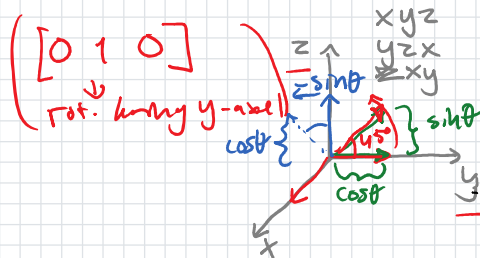
2] Linj. avb. $R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rotation kring vektorn $[1 \ 0 \ 0]^T$ med $\theta = \frac{1}{4}\pi = 45^\circ$ och $S: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ \r speglingen om planet $x+y+z=0$. L\aa t $T = S \circ R$

a) s\aa k $[T]$

L\aa sning: $[R] = [R[\vec{e}_1] \ R[\vec{e}_2] \ R[\vec{e}_3]]$

R \r rotation kring x-axeln

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



S \r spegling kring ett plan

h\aa r S agerar p\aa en vektor $\vec{u}$ kommer komponenten // med planet vara o\aa r\aa ndr\aa t

men komp. $\perp$ mot planet kommer att bli negativ

plan: $x+y+z=0 \rightarrow \vec{n} = [1 \ 1 \ 1]^T$ normalen

L\aa t $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, $\vec{u} = \vec{u}_{//} + \vec{u}_{\perp} = \vec{u}_{\perp} + \vec{u}_{//}$

$$\|\vec{n}\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$$

Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, $\vec{u} = \vec{u}_{//} + \vec{u}_{\perp} = \vec{u}_{\perp} + \vec{u}_{//}$ $\|\vec{n}\|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$

$S(\vec{u}) = \vec{u}_{\perp}$ detri speglar
höring $\vec{u}_{//}$ med planet $\vec{u}_{\perp}$ mot normalen

$S(\vec{u}) = \vec{u}_{//\text{plan}} - \vec{u}_{\perp\text{plan}} = \vec{u}_{\perp\vec{n}} - \vec{u}_{//\vec{n}} = \vec{u} - \vec{u}_{//\vec{n}} - \vec{u}_{//\vec{n}} = \vec{u} - 2\vec{u}_{//\vec{n}} =$

$= \vec{u} - \frac{2\vec{u} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \frac{2(a+b+c)}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3a - 2a - 2b - 2c \\ 3b - 2a - 2b - 2c \\ 3c - 2a - 2b - 2c \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} a - 2b - 2c \\ -2a + b - 2c \\ 2a - 2b + c \end{bmatrix} =$

$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \rightarrow [S] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$[T] = [S \circ R] = [S][R] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -4 & 0 \\ -2\sqrt{2} & -1 & -3 \\ -2\sqrt{2} & -1 & 3 \end{bmatrix}$

b) ker T

Lösning

$\left[[T] \mid \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \frac{1}{3\sqrt{2}} \left[\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2} & -4 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2} & -1 & -3 & 0 \\ -2\sqrt{2} & -1 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[R_3 - R_2]{R_2 \leftrightarrow R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2} & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}$

Vi ser 3 pivots $\rightarrow$ triviala lösningen $[T]\vec{x} = \vec{0}$

$\ker T = \{0\} \quad \dim(\ker(T)) = 0$

bildrummet $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4/3\sqrt{2} \\ -1/3\sqrt{2} \\ -1/3\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$ 3 vektorer

$\dim(\text{Col}(T)) = 3$ $\nwarrow \nearrow$
kolonnerna från $[T]$

3) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

a) Finns linj. avb. L sådan att $L(\vec{u}_1) = \vec{u}_2$ och $L(\vec{u}_3) = \vec{u}_4$

Lösning

Låt $A = [L]$, om A finns så måste L finnas (om linjär)

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, 9 okända givet $\bullet A\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ ✓
 $\bullet A\vec{u}_3 = \vec{u}_4$

$$A = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}, \quad 7 \text{ okända} \quad \checkmark \cdot A \vec{u}_3 = \vec{u}_q$$

$$\rightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ d+e+f=0 \\ g+h+i=1 \\ a-c=1 \\ d-f=1 \\ g-i=2 \end{cases}$$

Vi observerar att vi har 9 obekanta och 6 st linjärt oberoende ekv.

↓

kommer att fin en lösn. mängd som är en volym
→ oändligt med lösningar för L (och $[L]=A$)

T.ex. Låt $a=1 \rightarrow c=0 \rightarrow b=0$, $d=1 \rightarrow f=0 \rightarrow e=0$, $g=1$
→ $i=1-2=-1 \rightarrow h=1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) samma krav som ovan men L ska också avbilda $x-z=0$ planet på $x+z=0$

• ta fram parameterframställning

$$x-z=0 \rightarrow x=z \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Låt $z=t$

$$x+z=0 \rightarrow x=-z \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

$z=s$

kan använda $t=1$ och $s=1$, $\vec{u}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_6 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow$

→ Vi har 3 ekv till $A \vec{u}_5 = \vec{u}_6$

$$\begin{cases} a+c=-1 \\ d+f=0 \\ g+i=1 \end{cases}$$

$$1) \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$2) \begin{bmatrix} d & e & f \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{bmatrix} g & h & i \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Gauss

→ 9 ekv. och 9 obekanta. Viken skriva
ef $\begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och Gaussa. Men eftersom alla ekvationer bara består av obekanta från samma rad i A (a,b,c ; d,e,f ; g,h,i)

kan vi ställa upp 3 st 3×3 Gaussningar där första beror av a,b,c , andra av d,e,f och sista av g,h,i och lösa dessa.

Gauss

$$\rightarrow 1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 - R_3 \\ R_2 - R_3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & -2 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1 \\ 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} a = 0 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{matrix}$$

$$2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 - R_3 \\ R_2 - R_3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 & | & 1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} d = 1/2 \\ e = 0 \\ f = -1/2 \end{matrix}$$

$$3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & -1 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 - R_3 \\ R_2 - R_3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 & | & 3/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} g = 3/2 \\ h = 0 \\ i = -1/2 \end{matrix}$$

$$\rightarrow A = [L] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 3/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

kontroll: $\det A = 2 \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} \right) - 1 \left(\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0 \right) = \frac{-3+1}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \neq 0$

Villket vi förväntar oss (om = 0 betyder det att vi räknat fel någonstans)
eftersom ett explicit svar på a-i $\rightarrow \det A \neq 0$