

1] $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ a) söks $\text{Col}(A)$

Lösning

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 - R_2 \\ R_2 + R_3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - 3R_1 \\ R_3 + R_1}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

mål är bara att se pivotkolumnerna

→ Vi har pivotelement i kolumn 1, 2, 3. Det ger $\text{Col}(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

b) $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ söks $\vec{b} \in \text{Col}(A)$? och vad är i så fall lösningsmängden $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$

Lösning: kolumnerna $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$, kan vi hitta $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ där inte alla är noll så att $c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2 + c_3 \vec{a}_3 = \vec{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 - R_2 \\ R_3 - R_2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - 3R_1 \\ R_3 - 2R_1}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -8 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - R_3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

→ $c_1 = -1, c_2 = 2/3, c_3 = 2/3$ delsvaret ja, $\vec{b} \in \text{Col}(A)$

Lösningsmängd till $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 - R_2 \\ R_2 + R_3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - 3R_1 \\ R_3 + R_1}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -8 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 + R_2 \\ R_2/3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -8/3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -8/3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 2x_3 + 3x_5 = 1 + 2\left(\frac{2}{3} + \frac{8}{3}x_4\right) + 3x_5 = \frac{7}{3} + \frac{16}{3}x_4 + 3x_5 \\ x_2 &= \frac{3}{3}x_3 - 3x_4 + x_5 = 2 + 8x_4 - 3x_4 + x_5 = 2 + 5x_4 + x_5 \\ x_3 &= \frac{2}{3} + \frac{8}{3}x_4 \\ x_4 &\text{ fri} \\ x_5 &\text{ fri} \end{aligned}$$

Låt $x_4 = t \in \mathbb{R}$ och $x_5 = s \in \mathbb{R}$, det ger

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 2 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 16/3 \\ 5 \\ 8/3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ är vår lösningsmängd.}$$

2] $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, söks a så att $\det A = 0$

Lösning

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1(a \cdot 1 - (-1) \cdot 1) - 1(2 \cdot 1 - 0 \cdot a) + 2(2 \cdot (-1) - 0 \cdot a) = a + 1 - 2 - 4 = a - 5$$

Lösning

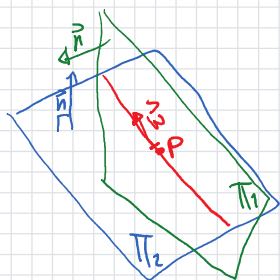
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 1(a \cdot 1 - (-1) \cdot 1) + 1(1 \cdot 0 - 1 \cdot 2) + 2(2 \cdot (-1) - 0 \cdot a) = a + 1 + (-2) + (-4) = a - 5$$

$\stackrel{!}{=} 0$ och det ger $a = 5$

- b) i) $A\vec{x} = \vec{b}$ har en unik lösning om $\det A \neq 0$, alltså finns unik lösning $\forall a \neq 5$
 ii) $A\vec{x} = \vec{b}$ har oändligt med lösningar om $\det A = 0$, alltså har den oändligt med lösningar om $a = 5$

för alla
↓

skärning av plan och kryssprodukt



$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z = D_1$$

$$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z = D_2$$

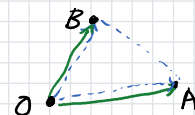
$$\dots = 0 = A_1x + B_1y + C_1z - D_1 = A_2x + B_2y + C_2z - D_2$$

$$x = \dots y$$

$A_1 - A_2$

med kryssprodukt: $L: P + t\vec{w}$, $t \in \mathbb{R}$ $n_1 = \dots$, $n_2 = \dots$
 $\vec{w} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

3] $A = (0, 1, 2)$, $B = (3, -1, 1)$, $O = (0, 0, 0)$



a) arean för triangeln OAB ska

Lösning

$$\vec{OB} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{OA} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{w} = \vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 \\ 2 \cdot 3 \\ -3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

arean: $\frac{\|\vec{w}\|}{2} = \frac{\sqrt{9+36+9}}{2} = \frac{\sqrt{54}}{2}$

b) 1) parameter $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\vec{OA}$ och $\vec{OB}$ ligger i planet liksom origo, det ger

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3s \\ s-t \\ 2s+t \end{bmatrix}$$

$$2) \vec{n} = \vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

sätt in C:

$$3(x-x_0) + 6(y-y_0) - 3(z-z_0) = 0$$

$$3x + 6y - 3z = 0$$

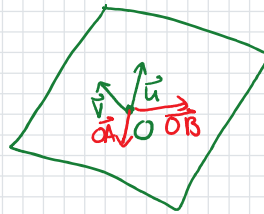
$$x = -2y + z$$

Låt $y = q$, $z = p$, $q, p \in \mathbb{R}$

$$\text{Det ger } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

parameter ekvation för planet

parameterframställningen:
ta vilka vektorer $\vec{u}, \vec{v}$ som
helst som ligger i planet.
(så länge $\vec{u}, \vec{v}$ är linjärt
oberoende)



$$c) \text{ Volym av parallelepipeden } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{OA} & \vec{OB} & \vec{OC} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3(2 \cdot 1 - 3 \cdot 1) +$$

$$\det(A) = \det(A^T)$$

$$+ 2(1 \cdot 2) = -3 + 6 = 3 \text{ v.e.}$$