

$$1) \begin{cases} ax + y - z = a \\ x - y + z = 0 \\ by + z = a \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 & a \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{R_1 - aR_2 \\ \text{byta plats} \\ \text{på } R_1 \text{ \& } R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1+a & -1+a & a \\ 0 & b & 1 & a \end{array} \right] \xrightarrow{R_3/b} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1+a & -1+a & a \\ 0 & 1 & 1/b & a/b \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - R_3(1+a)}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/b & a \\ 0 & 0 & \frac{-(1+a)(1+b)}{b} & \frac{a(b-a-1)}{b} \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \cdot \frac{b}{-(1+a)(1+b)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/b & a \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{a(b-a-1)}{(a+1)(1+b)} \end{array} \right]$$

För $a \neq -1$ och för $b \neq -1$

→ För $b \neq 0$, $a \neq -1$, $b \neq -1$ finns det lösningar

• för $b=0$ och $a \neq -1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & a/(1+a) \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array} \right] \xrightarrow{R_1+R_2, R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a/(1+a) \\ 0 & 1 & 0 & a/(1+a)+a \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array} \right]$ för $b=0$ konsistent

• för $a=-1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & b & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow$ ej konsistent!

• för $b=-1$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a(a+2)}{+1} \end{array} \right] \rightarrow$ om $a=0$ eller $a=-2$ är systemet konsistent för $b=-1$

Svar systemet är konsistent för $a \neq -1$ och $b \neq -1$, om $a \neq 0$ och $a \neq -2$

b) homogent om $a=0$, konsistent system automatiskt

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\uparrow}$$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{D. 1/9} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 \end{array} \right]$

$$c) \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3/9} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} R_1 + 3R_3 \\ R_2 + 4R_3 \end{array} \xrightarrow{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \cdot 2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \cdot 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & 2/9 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = 2/3 \\ x_2 = 8/9 \\ x_3 = 2/9 \end{array} \right\} \text{Svar.}$$

reducerade trappstegsform

$$\begin{array}{l} x_1 = 3x_3 \\ x_2 = 4x_3 \\ x_3 = 2/9 \end{array}$$

2]

Uppgift 2. Betrakta det linjära ekvationssystemet i de 4 obekanta, x_1, x_2, x_3 och x_4 som ges av

$$\left\{ \begin{array}{l} \# \text{ekv.} \\ \# \text{m.} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 - ax_4 = 1. \end{array} \right.$$

där a är en konstant.

- (a) För vilka värde på a systemet har oändliga många lösningar? Hitta lösningsmängden till systemet för alla sådana parametrar a .
(b) Finns där a för vilket systemet är inte konsistent?

Skärmklipp gjort: 2020-11-09 11:08

Skärmklipp gjort: 2020-11-09 11:07

Lösning

skriver upp på augmenterad matrisform

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -a & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 + 2R_2 \\ -R_2 \end{array}} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -a & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 + R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array}} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -(a+2) & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{-R_3/(a+2)}$$

b) systemet är konsistent för alla $a \neq -2$

$$a) \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/(a+2) \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 - R_3 \\ R_2 - 2R_3 \end{array}} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 - 3/(a+2) \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 - 6/(a+2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/(a+2) \end{array} \right] \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 3 - 3/(a+2) \\ x_2 = 4 - 6/(a+2) + x_3 \\ x_3 \text{ fri} \\ x_4 = 3/(a+2) \end{array}$$

Låt $x_3 = t, t \in \mathbb{R}$

(vår generella lösning blir

$$x_1 = 3 - 3/(a+2) + t$$

$$x_2 = 4 - 6/(a+2) + t$$

$$x_3 = t$$

$$x_4 = 3/(a+2)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{(a+2)} \begin{bmatrix} 3(a+1) \\ 2(2a+1) \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$3] \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & t \\ t & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) söks t så att A är invertierbar

Lösning är A invertierbar net vi att $A\vec{x} = \vec{0}$

här har triviala lösningar och att $A\vec{x} = \vec{b}$ har unika

Bara har triviala lösningen och att $A\vec{x} = \vec{b}$ har unika lösningen.

(Singen.)

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & t & 0 \\ t & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1/2 \\ R_2 - tR_1/2 \\ R_3 - 3R_1/2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & t/2 & 0 \\ 0 & -(1+2t) & 1-t^2/2 & 0 \\ 0 & +5 & +1+\frac{3t}{2} & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ -R_2 \\ R_3/5 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & t/2 & 0 \\ 0 & 1+t & \frac{t^2}{2}-1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{(2+3t)}{10} & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1-2R_3 \\ R_2-R_3(1+2t) \\ \end{array} \sim \\ & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-t-(2+3t)}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(t+4)(t+3)}{10} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{(2+3t)}{10} & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \uparrow -R_3 \cdot 10 / ((t+4)(t+3)) \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-(t+4)}{10} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{(2+3t)}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} R_1+R_3(t+4)/10 \\ R_2-R_3\frac{(2+3t)}{10} \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] I_3 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ For $t \neq -4, t \neq -3$

For $t = -4$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{array} \right] \leftarrow$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = - \dots x_3 \\ x_2 = - \dots x_3 \\ x_3 \text{ frei} \end{array} \right\} \rightarrow \text{ej invertierbar}$$

inverse $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right.$

$$u_v \quad A\vec{x} = \vec{0}$$

for all

Svar: A är inverterbar $\forall t \neq -4$ och -3

Och den reducerade trappstegsformen är I_3

b) För $t=0$ för v: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 2+2 & 4+0 & 0+5 \\ 0+4 & -1-1 & 1+1 \\ 3+0 & 1+1 & -1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Symmetrisch
 $C = A + A^T, C^T = C$

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+16+9 & 16-8+6 & 12+8-6 \\ 16-8+6 & 16+4+4 & 12-4-4 \\ 12+8-6 & 12-4-4 & 9+4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & 14 & 14 \\ 14 & 24 & 4 \\ 14 & 4 & 17 \end{bmatrix}$$

swar: $B =$ [

Uppgift 5. Betrakta ekvationssystemet

(*)
$$\begin{cases} 17x - 13y + 2z - 7w = 5, \\ 13x + 6y - z + 11w = 3. \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} 4 \text{ okända} \\ 2 \text{ ekv} \end{array} \right\}$$

- (a) Bestäm en lösning av systemet för vilken $x = 0$ och $w = 1$.
 (b) Förklara varför systemet (*) har oändligt många lösningar.
 (c) Finns det en lösning av systemet för vilken $y = -2x$ och $w = -3x$?

a) Sätt $x = 0$ $w = 1$

$$\begin{cases} -13y + 2z = 5 - 17 \cdot 0 + 7 \cdot 1 = 12 \\ 6y - z = 3 - 13 \cdot 0 - 11 \cdot 1 = -8 \end{cases}$$

Skärmklipp gjort: 2020-11-09 11:55

$$\begin{bmatrix} -13 & 2 & | & 12 \\ 6 & -1 & | & -8 \end{bmatrix} \sim \dots \quad \begin{matrix} y = \dots \\ z = \dots \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

c) $\begin{cases} 17x - 13(-2x) + 2z - 7(-3x) = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (17 + 26 + 21)x + 2z = 5 \end{cases}$