

Övning 9

den 26 november 2020 11:21

7.4] A $m \times n$ matris

$$\text{rank } A = \text{antalet pivots} = \dim(\text{col } A) \rightarrow \text{rank } A + \dim(\text{Nul } A) = n$$

$$\text{och om } W \subseteq \mathbb{R}^n \text{ delrum} \rightarrow \dim(W) + \dim(W^\perp) = n$$

antalet fria variabler
(nollrader)

komplement
allt i $\mathbb{R}^n$ som
inte är i W

$$7.5] \text{Nul } A = \text{Nul}(A^T A)$$

7.4]

8] hitta antalet pivots och antalet parametrar som behövs för lös.

$$\text{till } A\vec{x} = \vec{0} \text{ om}$$

a) A är en 7×9 matris med rang 5.

$$\text{antalet pivots} = \dim(\text{col } A) = \text{rank } A = 5$$

$$\text{antalet fria parametrar} = \dim(\text{Nul } A) = n - \text{rank } A = 9 - 5 = 4$$

10] Sökes hitta maxvärde på $\text{rank } A$ och min-värde på $\dim(\text{Nul } A)$ om A är

a) 6×4 matris $\rightarrow$ 6 ekv. 4 st okända. $\rightarrow m > n$

$$\max \text{rank } A = 4$$

$$\min \dim(\text{Nul } A) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4 pivots

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = 0 \text{ fri}$$

b) 2×6 matris $\rightarrow$ 2 ekv. 6 st okända

$$\max \text{rank } A = 2$$

$$\min \dim(\text{Nul } A) = n - \max \text{rank } A = 6 - 2 = 4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

$$\text{Lös. } \vec{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$\in \text{Nul } A$

$$x_1 = \dots$$

$$x_2 = \dots$$

x_3, x_4, x_5, x_6 fria

20] $W \subseteq \mathbb{R}^3$ delrum, $W = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, $\vec{v}_1 = (1 \ 1 \ 1)^T$, $\vec{v}_2 = (1 \ 2 \ -3)^T$

Sökes hitta baser till W och $W^\perp$

$$\text{och verifiera att } \dim W + \dim W^\perp = n = 3$$

komplement

Lösning

för att $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ ska vara baser till W måste de vara linjärt obero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \text{ linjär beroende}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 & \text{linjär beroende} \\ a \in \mathbb{R} & \text{linjär oberoende} \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 1(2 \cdot 0 - (-3) \cdot 5) + 1(5 \cdot 1 - 0 \cdot 1) + 4(1 \cdot (-3) - 1 \cdot 2) = 15 + 5 - 12 - 8 = 0$$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\uparrow \vec{v}_1 \quad \uparrow \vec{v}_2 \quad \uparrow \vec{v}_3}]{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\sim}{R_3 + 4R_2}]{R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \vec{v}_3 = 3\vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

linjärt oberoende eftersom $\vec{v}_3$ behöver båda för att bildas

bas för W är $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$

bas för $W^\perp$. Vi vet att $\vec{w} \in W^\perp$ kommer att vara ortogonal mot alla vektorer i W

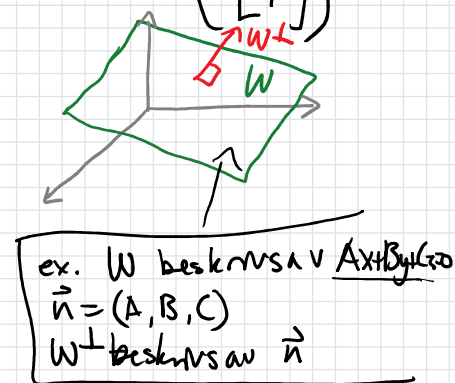
$$\vec{w} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - (-3) \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi betänker oss i $\mathbb{R}^3 \rightarrow$ max 3 oberoende vektorer kan spänna upp $\mathbb{R}^3$
i W har vi $\vec{v}_1$ $\vec{v}_2$ och i $W^\perp$ har vi $\vec{w}$

svaret: bas för W är $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$ och bas för $W^\perp$ är $\left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Vi ser att $\dim W = 2$, $\dim W^\perp = 1$
 $2 + 1 = 3$ v.s.v.

$$\left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^4 \\ \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in W \\ \vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \in W^\perp \end{array} \right) \text{ för att } \vec{v}_1 \cdot \vec{w}_1 = 0$$



$$\left[\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{w}_1 \right] \text{ kollar}$$

19] Visa att om $A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & x & y \end{bmatrix}$ har rang 1 måste $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ för något t

Lösning

$\text{rank } A = 1 \rightarrow$ vi kommer att ha 1 pivot

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & x & y \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 - xR_1]{\sim} \begin{bmatrix} 0 & y-x^2 & z-yx \\ 1 & x & y \end{bmatrix} \rightarrow \text{för att det bara ska vara 1 pivot måste } y-x^2=0 \text{ och } z-yx=0 \rightarrow y=x^2 \text{ och } z=xy$$

Vi har x som fri parameter. Låt $x=t \in \mathbb{R} \rightarrow y=t^2, z=t \cdot y=t^3$
V.S.V.

- 10] Bestäm om A har full kolonrang, full radrang, båda eller inga om
- a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 3×2 Vi Gaussar $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 + R_1]{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \sim R_2]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ vi har 2 pivots
 $\text{rank } A = 2 = n$
full kolonrang
men vi kommer att ha 2 i radrang också $< m = 3 \rightarrow$ inte full radrang
- b) $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ 2×2 full kolonrang och radrang (men behöver lösas)

- 15] verifiera att A och $A^T A$ har samma nollrum resp. radrum, där $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$
- nul A : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 + R_1]{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 = -2x_2$
Låt $x_2 = t \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$
 $\rightarrow \text{Nul}(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

row A : Transponera A och ta fram $\text{Col}(A^T)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 - 2R_1]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow 1 \text{ pivot i första kolumnen} \rightarrow 1 \text{ raden i } A$$

alltså är $\text{row } A = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4+1 & 2+8+2 \\ 2+8+2 & 4+16+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 24 \end{bmatrix}$$

Nul $(A^T A)$ $\begin{bmatrix} 6 & 12 & 0 \\ 12 & 24 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 - 2R_1]{R_1/6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 = -2x_2$
Låt $x_2 = t$
 x_2 fri
och $\text{Nul}(A^T A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{Nul } A$

row $(A^T A)$ transponerar $A^T A$ och räknar ut kolonrumet

$$\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 24 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 - 2R_1]{\sim} \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{pivot i första kolumnen av } (A^T A)^T$$

$\rightarrow \text{row } (A^T A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 6 & 12 \end{bmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ 6 \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$
 $= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} = \text{row}(A)$

V.S.V.

9. Låt

Tenta 2013 0107

$$U = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{och} \quad V = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Låt vidare W vara det delrum i $\mathbb{R}^5$ som består av alla vektorer som ligger i både U och V . Bestäm en bas för W . (4 p)

Skärmklipp gjort: 2020-11-26 14:09

U beskriver plan i $\mathbb{R}^5$ Låt $\vec{u}_1 = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2]^T$, $\vec{u}_2 = [1 \ 0 \ 2 \ 0 \ 1]^T$
 V också plan i $\mathbb{R}^5$ och $\vec{v}_1 = [-2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]^T$, $\vec{v}_2 = [1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0]^T$ *skärning*
 $U = \text{span} \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2 \}$ och $V = \text{span} \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \}$
 $W = \text{span} \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \}$

men för basen för W måste jag kolla oberoende

$$\begin{aligned} \left[\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \mid \vec{0} \right] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ R_3 - R_1 \\ R_5 - 2R_1 \end{matrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \text{flyttar} \\ \text{vär} \\ \text{nskrader} \end{matrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 + R_3 \\ R_3 + R_2 \end{matrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3/4 \\ R_3/4 \end{matrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 - 3R_3/2 \\ R_2 - 3R_3/2 \\ R_3/2 \end{matrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \uparrow \end{matrix} \end{aligned}$$

Pivotskolloner
ingen pivotskolloner

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{2} x_4 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} x_4 \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} x_4 \\ \lambda_4 &\text{ fri} \end{aligned} \leftarrow \text{en fri}$$

→ det betyder att $\vec{v}_2$ är linjärt beroende av $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ och $\vec{v}_1$
 $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ och $\vec{v}_1$ linjärt oberoende

→ bas för W är $\{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1 \}$

$$S \circ R \neq AB$$

linjära *↑* *↑*

$$[S \circ R] = AB, \text{ om } [S] = A, [R] = B$$

matriser *↑*

avbildningar matriser

$$f(x): D \rightarrow V$$

$$\underline{[S \circ R(\vec{x})]} = A B \vec{x}$$