

Övning 8

den 19 november 2020 13:08

6.3 $T: D \rightarrow V$
 $\downarrow$ linjär
 $[T]_E = A$

transf. $T(\vec{x}) = \vec{0}$, $\ker(T) = \left\{ \begin{array}{l} \text{härnan} \\ \text{mängden av alla } \vec{x} \\ \text{så att } T(\vec{x}) = \vec{0} \end{array} \right\}$
 matriser $A\vec{x} = \vec{0}$, $\text{Nul}(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{hollrummet} \\ \text{alla } \vec{x} \text{ så att } A\vec{x} = \vec{0} \end{array} \right\}$

transf. $T(\vec{x}) = \vec{b}$, $\text{Im}(T) = \left\{ \begin{array}{l} \text{image} \\ \text{mängden av alla outputs} \\ \text{b vi kan få från } T(\vec{x}) \end{array} \right\}$
 matriser $A\vec{x} = \vec{b}$, $\text{Col}(A) = \left\{ \begin{array}{l} \text{kolonnenrummet} \\ \text{bildrummet} \\ \text{mängden av alla } \vec{b} \text{ så att} \\ A\vec{x} = \vec{b} \text{ ; alla } \vec{b} \text{ så att } [A|\vec{b}] \\ \text{är konsistent} \end{array} \right\}$

få från kolonnenrummet

$[A] \xrightarrow{\text{Gaussar}} \text{trappstegsform} \rightarrow$ ser pivotkolonner. dessa index på kolonner tar vi för att bilda $\text{Col } A = \text{span} \left\{ \begin{array}{l} \text{kolonnerna } i \\ \text{motsvarande pivot} \\ \text{kolonnerna} \end{array} \right\}$

få från nollrummet

$[A | \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix}] \rightarrow$ Gaussar och får från lösningsmängden
 ex ett plan på parameterbestämning, efter en linje
 riktningsektorer från lösningsmängden utgör såväl
 nollrummet

om $\ker(T) = \{\vec{0}\}$ eller $\text{Nul}(A) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow$ Kolonnenrummet eller bildrummet har full rang.

A $n \times n$ och full rang $\rightarrow$ dimensionen för kolonnenrummet är $= n$

$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ är inverterbar $\Leftrightarrow \text{Col}(A)$ har full rang $\Leftrightarrow \text{Nul}(A) = \{\vec{0}\}$

T är "onto" (surjektiv?) — hela värdemängden / kodomänheten nås
 $[A|\vec{b}]$ är konsistent

T är "one-to-one" (injektiv) — en vektor $\vec{x}$ mappas via $T(\vec{x})$ till endast en vektor $\vec{b}$ $T(\vec{x}) = \vec{b}$

om injektiv och surjektiv $\Leftrightarrow$ inverterbar

$A\vec{x} = \vec{b} \rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

4] hitta härnan till $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ Lösning $[A | \vec{0}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & 7 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 - R_3 \\ R_2 - 2R_1 \end{array}} \sim$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 & | & 0 \\ 0 & 1 & -5 & | & 0 \\ 1 & -1 & 7 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} R_1 - R_2 \\ R_3 + R_2 \end{array}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & -5 & | & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = 5x_3 \\ x_3 \text{ fri} \end{array}$ Låt $x_3 = t \in \mathbb{R}$
 Det ger

$$[1 \ -1 \ 7 \ 10] K_3 + K_2 [1 \ 0 \ 2 \ 10]$$

x_3 fri $\rightarrow$ vet ger

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{Lösningssamg. Det ger } \text{Nul}(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

9] a) givet att $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Finns $\vec{b}$ i $\text{Col}(A)$ om $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

Lösning

Vi gaussar $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 + 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

pivots finns i kolumn 1 och 2. Det ger

$$\text{Col}(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$$

Om $\vec{b}$ finns $\rightarrow \vec{b}$ måste vara en linjär komb. av vektorena i kolumnerna

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 + 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{systemet är inte konsistent} \\ \text{därför } \vec{b} \notin \text{Col}(A)$$

15] $w_1 = -x_1 + 3x_2 + 2x_3$
 $w_2 = 2x_1 + 4x_3$
 $w_3 = x_1 + 3x_2 + 6x_3$

Sökes är systemet surjektivt och injektivt

Lösning vi bildar $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

injektiv?

Är A invertierbar? : $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -1(-3 \cdot 4) + 3(4 \cdot 1 - 6 \cdot 2) + 2(2 \cdot 3) = 12 + 12 - 36 + 12 = 0$

$\rightarrow$ alltså ej invertierbar $\rightarrow$ ej injektiv.

surjektivt Låt $\vec{b} = (a, b, c)$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 + 2R_1]{R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 0 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+c \\ a+2b \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+c-a-2b \\ a+2b \\ c \end{bmatrix}$$

Delta är endast konsistent då $a+c-a-2b = c-2b \stackrel{!}{=} 0$

$\rightarrow$ alltså ej $\forall b \rightarrow$ ej surjektiv.

6.4] kompositioner av Linjära avbildningar
 $(T_2 \circ T_1)(\vec{x}) = T_2(T_1(\vec{x}))$

$$T_1: D_1 \rightarrow V_1$$

$$T_2: D_2 \rightarrow V_2$$

6.1) kompositioner av Linjära avbildningar

$$(T_2 \circ T_1)(\vec{x}) = T_2(T_1(\vec{x}))$$

matrisvariant

$$B(A\vec{x}) = (BA)\vec{x}$$

Linjära regler gäller! $T_2 T_1(a\vec{v} + b\vec{w}) =$

$$= a T_2 T_1(\vec{v}) + b T_2 T_1(\vec{w})$$

$$[T^{-1}] = [T]^{-1}$$

$$I_1: D_1 \rightarrow V_1$$

$$T_2: D_2 \rightarrow V_2$$

men för $T_2 \circ T_1$ måste $T_1(\vec{x})$ vara g/l för input till $T_2 \Rightarrow D_2 = V_1$

$$T_2 \circ T_1: D_1 \rightarrow V_2$$

$$3] T_1(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

$$T_2(x_1, x_2) = (3x_1, 2x_1 + 4x_2)$$

a) söks $[T_1], [T_2]$ Lösning $T_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} =$
 $= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow [T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, T_2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix} =$
 $= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow [T_2] = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

b) söks $[T_1 \circ T_2] = [T_1][T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} =$
 $= \begin{bmatrix} 3+2 & 4 \\ 3-2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \leftarrow$ vektorerna

c) söks $T_1 \circ T_2(x_1, x_2)$

$$\begin{bmatrix} T_1 \circ T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1 + 4x_2 \\ x_1 - 4x_2 \end{bmatrix} \rightarrow T_1 \circ T_2(x_1, x_2) = (6x_1 + 4x_2, x_1 - 4x_2)$$

V.S.V.

7] 2 sammansatta konstf., söks $[T_2 \circ T_1]$, som är

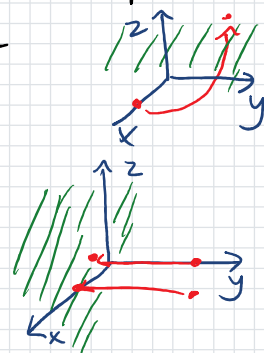
a) spegling läng yz-planet följer av ortogonal projektion på xz-planet

Lösning Låt speglingen vara T_1 och projektionen T_2

$$[T_1] = [T(\vec{e}_1) \ T(\vec{e}_2) \ T(\vec{e}_3)] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[T_2 \circ T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

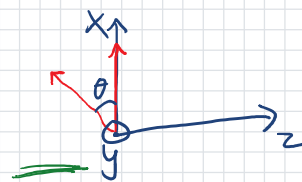


b) rotation moturs kring y-axeln 45° Alltså höjning med en faktor $k = \sqrt{2}$

$$[T_2] = \sqrt{2} I = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, [T_1] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} = \left\{ \theta = 45^\circ, \text{faktor } \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

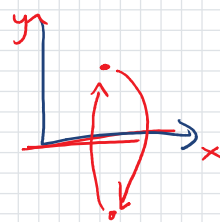
$$\rightarrow [T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



13] a) invers till spegling kring x-axeln i $\mathbb{R}^2$?

svar: ~~$\mathbb{R}^2$~~
 $T^{-1} = T$

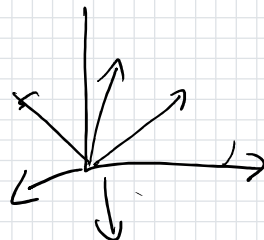


b) invers till rotation kring origo med vinkel $\pi/4$

$$T = R_{\pi/4} \quad T^{-1} = R_{-\pi/4}$$

$$\frac{2\pi}{\pi/4} = 8$$

$$T^{-1} = R_{\pi/4}^8$$



7.1] en mängd vektorer $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ utgör en bas för delrummet V till $\mathbb{R}^n$ om
 alla $\vec{v}_i$ är linjärt oberoende och spänner upp V ($V = \text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$)
 basen är $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$
 standardbas $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$
 $\dim(V) =$ antalet basvektorer i V som är linjärt ober.

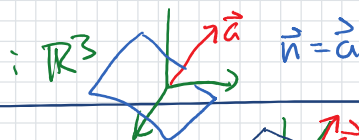
6] plan $x+y+z=0$ i $\mathbb{R}^3$. söks 3 olika baser för planet.

Lösning

1) $x = -y - z$
 Låt $y = t \in \mathbb{R}$
 $z = s \in \mathbb{R}$
 $\rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{bas} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

2) $y = -x - z$
 Låt $x = t \in \mathbb{R}$
 $z = s \in \mathbb{R}$
 $\rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{bas} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

3) $z = -\frac{y}{2} - \frac{x}{2}$...



11] b) hitta en bas till hyperplanet $\vec{a}^\perp$

$\vec{a} = (2, -1, 4, 1)$. Vi vet att alla basvektorer $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$
 är ortogonala mot $\vec{a} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{a}_i = 0, i = 1, 2, 3$

$\vec{a}_1 = (0, 1, 0, 1) \quad \vec{a} \cdot \vec{a}_1 = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$

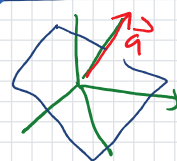
$\vec{a}_2 = (2, 0, 1, 0) \quad \vec{a} \cdot \vec{a}_2 = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0$

$\vec{a}_3 = (1, 2, 0, 0) \quad \vec{a} \cdot \vec{a}_3 = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0$

$\cdot 1 \quad 3$

$\cdot 2 \quad 4$

$\cdot 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 0$



$$\vec{a}_3 = (1, 2, 0, 0) \quad \vec{a} \circ \vec{a}_3 = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0$$

$$\cdot 2 \quad 4$$

$$\cdot 1 \quad 4 / 12 / 34$$

$$\frac{1}{2} \vec{a}_2 + 2 \vec{a}_1 = (1, 2, -1/2, 2)$$

7.2
1]

a) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ i } \mathbb{R}^2$

b) $\vec{v}_1 = (-1, 3, 2), \vec{v}_2 = (6, 1, 1) \text{ i } \mathbb{R}^3$